



**Universidade Federal de Pelotas**  
**Instituto de Física e Matemática**  
**Departamento de Informática**  
**Bacharelado em Ciência da Computação**

# **Técnicas Digitais**

## **Aula 6**

**2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos:  
Minimização de Função de 4 Variáveis com  
Mapas de Karnaugh, Circuito Mínimo em Soma  
de Produtos**

**Prof. José Luís Güntzel**

**[guntzel@ufpel.edu.br](mailto:guntzel@ufpel.edu.br)**

**[www.ufpel.edu.br/~guntzel/TD/TD.html](http://www.ufpel.edu.br/~guntzel/TD/TD.html)**

# 2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

## ▶ Mapas de Karnaugh

Considere uma tabela-verdade para funções de 4 entradas

A fim de garantir a adjacência de mintermos que se diferenciam de somente uma variável, teremos que

- re-ordenar os mintermos
- criar uma tabela bidimensional

A	B	C	D	mintermos
0	0	0	0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$
0	0	0	1	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$
0	0	1	0	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$
0	0	1	1	$\bar{A}\bar{B}CD$
0	1	0	0	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$
0	1	0	1	$\bar{A}B\bar{C}D$
0	1	1	0	$\bar{A}BC\bar{D}$
0	1	1	1	$\bar{A}BCD$
1	0	0	0	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$
1	0	0	1	$A\bar{B}\bar{C}D$
1	0	1	0	$A\bar{B}C\bar{D}$
1	0	1	1	$A\bar{B}CD$
1	1	0	0	$AB\bar{C}\bar{D}$
1	1	0	1	$AB\bar{C}D$
1	1	1	0	$ABC\bar{D}$
1	1	1	1	$ABCD$

## 2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

### ► Mapas de Karnaugh

Dispondo os mintermos em duas dimensões

$\bar{C}\bar{D}$   
↑

$\bar{A}\bar{B}$  ←

$\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}\cdot\bar{D}$	$\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}\cdot D$	$\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C\cdot\bar{D}$	$\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C\cdot D$
$\bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}\cdot\bar{D}$	$\bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}\cdot D$	$\bar{A}\cdot B\cdot C\cdot\bar{D}$	$\bar{A}\cdot B\cdot C\cdot D$
$A\cdot B\cdot\bar{C}\cdot\bar{D}$	$A\cdot B\cdot\bar{C}\cdot D$	$A\cdot B\cdot C\cdot\bar{D}$	$A\cdot B\cdot C\cdot D$
$A\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}\cdot\bar{D}$	$A\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}\cdot D$	$A\cdot\bar{B}\cdot C\cdot\bar{D}$	$A\cdot\bar{B}\cdot C\cdot D$

Colocando as variáveis de entrada para fora da tabela...

## 2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

### ► Mapas de Karnaugh

Para funções de 4 variáveis

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$				
$\bar{A}B$				
$AB$				
$A\bar{B}$				

## 2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

### ► Cobertura dos Mapas de Karnaugh

Considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de “1s” adjacentes, os quais podem conter 2, 4, 8, 16, 32 ... “1s”
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto usando somente as variáveis de entrada que são iguais para todos os “1s”
3. Se houver mais de um grupo, montar a equação em soma de produtos (que já estará simplificada)

**OBS: se algum “1” restar sozinho, seu produto (mintermo) também deve ser usado na equação em soma de produtos**

# 2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

## ▶ Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de “1s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

**Exemplo 18:**

$$F18 = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$$

$$\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$$

F18	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	1	1	0	0
$AB$	0	0	0	0
$A\bar{B}$	0	0	0	0

## 2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

### ► Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de “1s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

Exemplo 19:

Opa!

Mas dá para simplificar mais...

(Usar o maior grupo, ao invés dos grupos que o compõem)

F19	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	1	1	1	1
$AB$	0	0	0	0
$A\bar{B}$	0	0	0	0

$\bar{A}\cdot B\cdot \bar{C}$        $\bar{A}\cdot B\cdot C$

# 2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

## ▶ Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de “1s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

**Exemplo 19:**

$$F_{19} = \bar{A} \cdot B$$

F19	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	1	1	1	1
$AB$	0	0	0	0
$A\bar{B}$	0	0	0	0

$\bar{A} \cdot B$



# 2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

## ▶ Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de “1s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

**Exemplo 20:**

$$F_{20} = C \cdot D$$

Os grupos devem ter 2, 4, 8 ou 16 elementos

( $2^n$  elementos, onde  $n$  é o número de variáveis de entrada)

F20	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	1	0
$\bar{A}B$	0	0	1	0
$AB$	0	0	1	0
$A\bar{B}$	0	0	1	0

C·D

## 2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

### ▶ Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

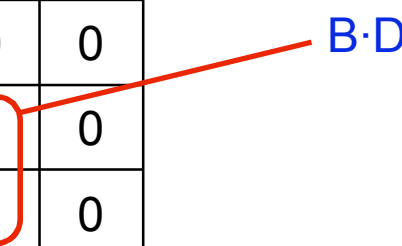
1. Identificar grupos de “1s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

**Exemplo 21:**

$$F_{21} = B \cdot D$$

Os grupos só podem ter formato retangular ou quadrado

F21	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	0	1	1	0
$AB$	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	0	0



## 2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

### ► Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de “1s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

**Exemplo 22:**

$$F_{22} = B \cdot \bar{D}$$

Os elementos de um grupo podem estar separados, devido às limitações da representação do mapa

F22	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	1	0	0	1
$AB$	1	0	0	1
$A\bar{B}$	0	0	0	0

$B \cdot \bar{D}$

## 2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

### ▶ Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de “1s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

**Exemplo 23:**

$$F_{23} = \bar{B} \cdot \bar{D}$$

F23	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}B$	0	0	0	0
$AB$	0	0	0	0
$A\bar{B}$	1	0	0	1

$\bar{B} \cdot \bar{D}$

## 2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

### ► Cobertura dos Mapas de Karnaugh

Considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de “1s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

Exemplo 24:

$$F_{24} = \bar{C} \cdot \bar{D} + C \cdot \bar{D}$$

Opa!

Mas dá para simplificar mais...

(Usar o maior grupo, ao invés dos grupos que o compõem)

F <sub>24</sub>	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}B$	1	0	0	1
$AB$	1	0	0	1
$A\bar{B}$	1	0	0	1

$\bar{C} \cdot \bar{D}$        $C \cdot \bar{D}$

## 2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

### ► Cobertura dos Mapas de Karnaugh

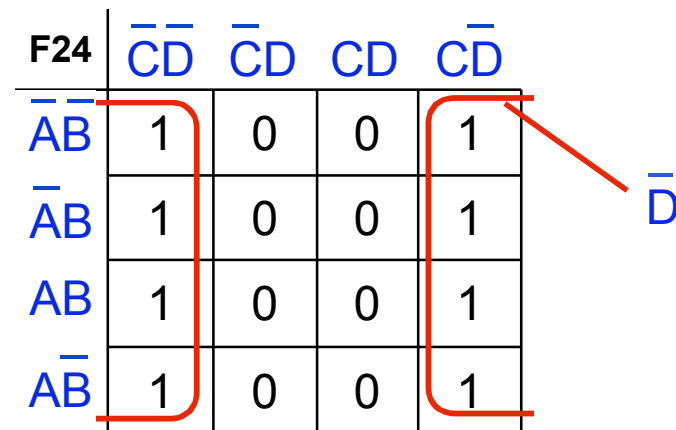
Considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de “1s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

**Exemplo 24:**

$$F_{24} = \bar{D}$$

F24	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}B$	1	0	0	1
$AB$	1	0	0	1
$A\bar{B}$	1	0	0	1



## 2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

### ► Cobertura dos Mapas de Karnaugh

Considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de “1s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

Exemplo 25:

$$F_{25} = \bar{A} \cdot D + B \cdot \bar{D}$$

- Usar somente os grupos essenciais (em vermelho)
- O grupo não-essencial não deve ser usado (neste caso)

F25	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	1	1	0
$\bar{A}B$	1	1	1	1
$AB$	1	0	0	1
$A\bar{B}$	0	0	0	0

Diagram illustrating the Karnaugh map for F<sub>25</sub>. The map shows the function F<sub>25</sub> in terms of variables A, B, C, and D. The map is a 4x4 grid with columns labeled  $\bar{C}\bar{D}$ ,  $\bar{C}D$ ,  $CD$ , and  $C\bar{D}$ , and rows labeled  $\bar{A}\bar{B}$ ,  $\bar{A}B$ ,  $AB$ , and  $A\bar{B}$ . The function value is 1 for the cells (row, column) corresponding to  $(\bar{A}\bar{B}, \bar{C}D)$ ,  $(\bar{A}\bar{B}, CD)$ ,  $(\bar{A}B, \bar{C}\bar{D})$ ,  $(\bar{A}B, \bar{C}D)$ ,  $(\bar{A}B, CD)$ ,  $(\bar{A}B, C\bar{D})$ ,  $(AB, \bar{C}\bar{D})$ , and  $(AB, C\bar{D})$ . The map shows two essential prime implicants circled in red:  $\bar{A} \cdot D$  (covering the top two rows, columns 2 and 3) and  $B \cdot \bar{D}$  (covering the middle two rows, columns 1 and 2). A non-essential prime implicant  $\bar{A} \cdot B$  is circled in blue, covering the middle two rows, all columns.

## 2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

### ► Cobertura dos Mapas de Karnaugh

Considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de “1s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

**Exemplo 26:**

F26	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	1	0	1
$\bar{A}B$	0	0	1	0
$AB$	1	0	0	0
$A\bar{B}$	1	1	0	1

$A \cdot \bar{C} \cdot \bar{D}$  (grouping the 1s in the first column)  
 $\bar{B} \cdot \bar{D}$  (grouping the 1s in the first and fourth columns)  
 $\bar{A} \cdot B \cdot C \cdot D$  (grouping the 1 in the second row, third column)  
 $\bar{B} \cdot \bar{C}$  (grouping the 1s in the first and second columns)

$$F26 = \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{D} + A \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot D$$



## 2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

### ► Cobertura dos Mapas de Karnaugh

#### Exercício 7:

Para a função dada pela equação abaixo:

- Encontre a equação mínima em soma de produtos
- Desenhe o circuito resultante e calcule seu custo

$$S7(A,B,C,D) = \sum(0, 1, 2, 5, 6, 7, 13, 15)$$

S7	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	1	0	1
$\bar{A}B$	0	1	1	1
$AB$	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	0	0

## 2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

### ► Cobertura dos Mapas de Karnaugh

#### Exercício 8:

Para a função dada pela equação abaixo:

- Encontre a equação mínima em soma de produtos
- Desenhe o circuito resultante e calcule seu custo

$$S8(A,B,C,D) = \sum( 1, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 15 )$$

S8	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	1	0	0
$\bar{A}B$	0	1	1	1
$AB$	1	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	1	0

## 2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

### ► Cobertura dos Mapas de Karnaugh

#### Exercício 9:

Para a função dada pela equação abaixo:

- Encontre a equação mínima em soma de produtos
- Desenhe o circuito resultante e calcule seu custo

$$S9(W,X,Y,Z) = \sum( 0, 1, 2, 5, 8, 9,10 )$$

S9	$\bar{Y}\bar{Z}$	$\bar{Y}Z$	$YZ$	$Y\bar{Z}$
$\bar{W}\bar{X}$	1	1	0	1
$\bar{W}X$	0	1	0	0
$WX$	0	0	0	0
$W\bar{X}$	1	1	0	1