Universidade Federal de Pelotas
Instituto de Física e Matemática
Departamento de Informática
Bacharelado em Ciência da Computação

Técnicas Digitais

Aula 5

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos:

Minimização de Função de 3 Variáveis com Mapas de Karnaugh, Circuito Mínimo, Fatoração

Prof. José Luís Güntzel

guntzel@ufpel.edu.br

www.ufpel.edu.br/~guntzel/TD/TD.html

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Relembrando a Simplificação Algébrica

Redução do número de literais ou de operações na equação Booleana, através da aplicação das propriedades da Álgebra Booleana

$$F = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

Pela prop. (14), $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

$$F = \overline{A}B(\overline{C} + C) + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

Pela prop. (4), $\overline{C} + C = 1$

$$F = \overline{A}B \cdot 1 + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

Pela prop. (6), $\overline{A}B \cdot 1 = \overline{A}B$

$$F = \overline{A}B + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

Soma de Produtos simplificada

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Relembrando a Simplificação Algébrica

Entretanto, o termo $\overline{A}B\overline{C}$ poderia ter sido simplificado com o termo $AB\overline{C}$

$$F = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

Como fazer isso?

Utilizando a propriedade (3), que permite a seguinte manipulação:

$$\overline{A}B\overline{C} = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Relembrando a Simplificação Algébrica

$$F = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + \bar{A}B\bar{C}$$

Pela prop. (3), $\bar{A}B\bar{C} = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}B\bar{C}$

Pela prop. (14)

$$F = \bar{A}B(\bar{C} + C) + A\bar{B}C + (A + \bar{A})B\bar{C}$$

Pela prop. (4)

$$F = \bar{A}B \cdot 1 + A\bar{B}C + 1 \cdot B\bar{C}$$

Pela prop. (6)

$$F = \bar{A}B + A\bar{B}C + B\bar{C}$$

Soma de Produtos simplificada (mínima, no caso)

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Simplificação Algébrica

Dificuldades na obtenção da equação mínima:

- Não adianta encontrar todos os pares de termos que se diferenciam de somente uma variável
- O processo de simplificação é recursivo: após simplificar mintermos, pode ser possível continuar a simplificação com os produtos resultantes da primeira rodada de simplificação
- A ordem na qual se procede a simplificação faz diferença!
- É difícil identificar as simplificações possíveis (e também a ordem ótima)

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Simplificação Algébrica: Exemplo 2

$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$$

Pela prop. (14)

$$F = \bar{A}\bar{B}(\bar{C} + C) + A\bar{B}(\bar{C} + C)$$

Pela prop. (4)

$$F = \bar{A}\bar{B}\cdot 1 + A\bar{B}\cdot 1$$

Pela prop. (6)

$$F = \bar{A}\bar{B} + A\bar{B}$$

Mas ainda dá para simplificar mais

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Simplificação Algébrica: continuação

$$F = \overline{A}\,\overline{B} + A\overline{B}$$

Pela prop. (14)

$$F = (\overline{A} + A)\overline{B}$$

Pela prop. (4)

$$F = 1 \cdot \overline{B}$$

Pela prop. (6)

$$F = \overline{B}$$

Soma de Produtos simplificada

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Simplificação Algébrica: exemplo 3

$$F = A\overline{B}C + ABC + \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C}$$

Pela prop. (14)

$$F = A\overline{B}C + (A + \overline{A})BC + \overline{A}B\overline{C}$$

Pela prop. (4)

$$F = A\overline{B}C + 1 \cdot BC + \overline{A}B\overline{C}$$

Pela prop. (6)

$$F = A\overline{B}C + BC + \overline{A}B\overline{C}$$

Soma de Produtos simplificada (mas não mínima!!)

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Simplificação Algébrica: Porém…

$$F = A\overline{B}C + ABC + \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C}$$

Pela prop. (14)

$$F = AC(\overline{B} + B) + \overline{A}B(C + \overline{C})$$

Pela prop. (4)

$$F = AC \cdot 1 + \overline{A}B \cdot 1$$

Pela prop. (6)

$$F = AC + \overline{A}B$$

Soma de Produtos simplificada

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Mapas de Karnaugh

Identificando na tabela-verdade os mintermos que se diferencial de somente uma variável…

A	B	C	mintermos
0	0	0	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
0	0	1	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$
0	1	0	$\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$
0	1	1	$\overline{A} \cdot B \cdot C$
1	0	0	$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
1	0	1	$A \cdot \overline{B} \cdot C$
1	1	0	$A \cdot B \cdot \overline{C}$
1	1	1	$A \cdot B \cdot C$

Se trocarmos a ordem de alguns elementos, cada par de elementos adjacentes podem ser simplificados

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Mapas de Karnaugh

Reordenando os mintermos

$\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}$	$\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C$	$\bar{A}\cdot B\cdot C$	$\bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}$
$A\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}$	$A\cdot\bar{B}\cdot C$	$A\cdot B\cdot C$	$A\cdot B\cdot\bar{C}$

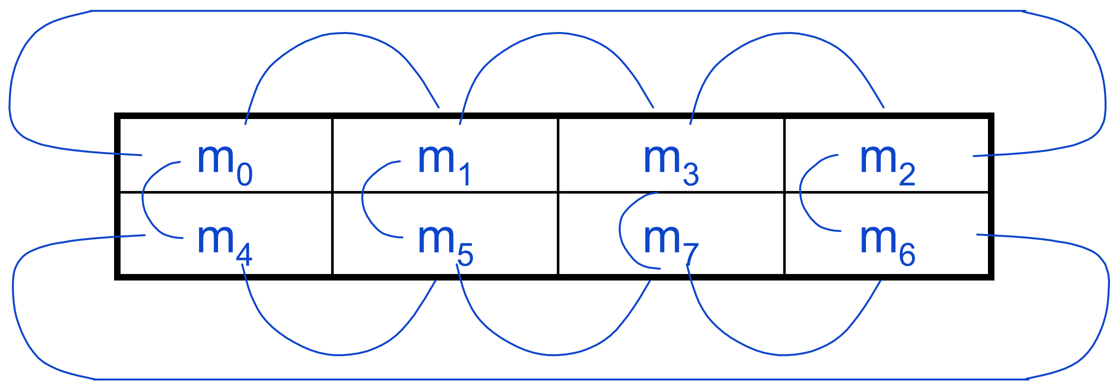
Nesta nova organização da tabela-verdade existe uma relação de adjacência entre os mintermos.

Quaisquer dois mintermos adjacentes se diferenciam de somente uma variável

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Mapas de Karnaugh

Reordenando os mintermos



A relação de adjacência vale somente:

- **Na horizontal**
- **Na vertical**

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Mapas de Karnaugh

Eis o tal mapa de Karnaugh (para funções de 3 variáveis)

$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$	$\overline{A}\cdot B\cdot C$	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$
$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$	$A\cdot\overline{B}\cdot C$	$A\cdot B\cdot C$	$A\cdot B\cdot\overline{C}$

	$\overline{B}\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$				
A				

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. **Identificar grupos de "1s" adjacentes, os quais podem conter 2, 4, 8, 16, 32 … "1s"**
2. **Para cada grupo, escrever a equação de produto usando somente as variáveis de entrada que são iguais para todos os "1s"**
3. **Se houver mais de um grupo, montar e equação em soma de produtos (que já estará simplificada)**

OBS: se algum "1" restar sozinho, seu produto (mintermo) também deve ser usado na equação em soma de produtos

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de "1s" adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

Exemplo 1:

$F1 = \bar{A}\cdot\bar{B}$

F1	$\bar{B}\bar{C}$	$\bar{B}C$	BC	$B\bar{C}$
$\bar{A}$	1	1	0	0
A	0	0	0	0

$\bar{A}\cdot\bar{B}$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de "1s" adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

Exemplo 2:

$F2 = \overline{B} \cdot C$

F2	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$	0	1	0	0
A	0	1	0	0

$\overline{B} \cdot C$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de "1s" adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

Exemplo 3:

$F3 = \bar{A} \cdot \bar{C}$

F3	$\bar{B}\bar{C}$	$\bar{B}C$	BC	$B\bar{C}$
$\bar{A}$	1	0	0	1
A	0	0	0	0

$\bar{A} \cdot \bar{C}$

As duas "células" extremas de uma mesma linha também são consideradas adjacentes.

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de "1s" adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

Exemplo 4:

$F4 = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B \cdot \overline{C}$

F4	$\overline{B}\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$	1	1	0	0
A	0	0	0	1

$\overline{A} \cdot \overline{B}$

$A \cdot B \cdot \overline{C}$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de “1s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

Exemplo 5:

$F5 = \overline{A} \cdot \overline{B} + B \cdot C$

F5	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$	1	1	1	0
A	0	0	1	0

$\overline{A} \cdot \overline{B}$

$B \cdot C$

Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de “1s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

Exemplo 6:

$F6 = \bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot B$

F6	$\bar{B}\bar{C}$	$\bar{B}C$	BC	$B\bar{C}$
$\bar{A}$	1	1	0	0
A	0	0	1	1

$\bar{A} \cdot \bar{B}$

$A \cdot B$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de “1s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

Exemplo 7:

$F7 = \bar{A}\cdot\bar{B} + \bar{A}\cdot B$

F7	$\bar{B}\bar{C}$	$\bar{B}C$	BC	$B\bar{C}$
$\bar{A}$	1	1	1	1
A	0	0	0	0

$\bar{A}\cdot\bar{B}$

$\bar{A}\cdot B$

Opa!
Mas ainda dá para simplificar mais !?!

$F7 = \bar{A}\cdot(\bar{B} + B) = \bar{A}$

Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de "1s" adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

Exemplo 7:

$F7 = \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$

Opa!
Mas ainda dá para simplificar mais !?!

$F7 = \bar{A} \cdot (\bar{B} + B) = \bar{A}$

F7	$\bar{B}\bar{C}$	$\bar{B}C$	BC	$B\bar{C}$
$\bar{A}$	1	1	1	1
A	0	0	0	0

$\bar{A} \cdot \bar{B}$

$\bar{A} \cdot B$

Isto não deveria acontecer!!!!

Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de "1s" adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

Exemplo 7: Refazendo…

$F7 = \bar{A}$

F10	$\bar{B}\bar{C}$	$\bar{B}C$	BC	$B\bar{C}$
$\bar{A}$	1	1	1	1
A	0	0	0	0

$\bar{A}$

Trata-se de um grupo de 4 "1s" ocupando uma linha inteira do mapa de Karnaugh

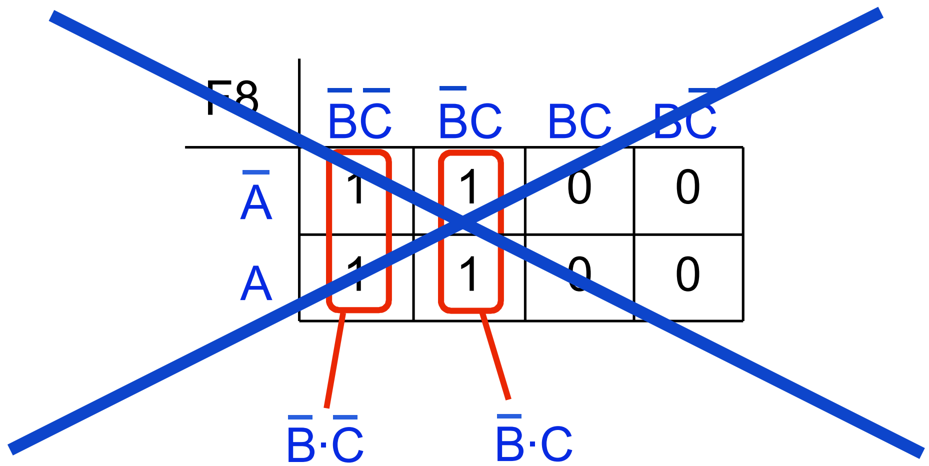
2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de “1s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

Exemplo 8: semelhante ao exemplo 7…



2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de “1s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

Exemplo 8:

$F8 = \bar{B}$

F8	$\bar{B}\bar{C}$	$\bar{B}C$	BC	$B\bar{C}$
$\bar{A}$	1	1	0	0
A	1	1	0	0

$\bar{B}$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de “1s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

Exemplo 9:

$F9 = C$

F9	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$	0	1	1	0
A	0	1	1	0

C

Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de “1s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

Exemplo 10:

$F10 = \overline{C}$

F10	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$	1	0	0	1
A	1	0	0	1

$\overline{C}$

As duas “células” extremas também são consideradas adjacentes.

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de “1s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

Exemplo 11:

$F11 = \overline{C} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$

$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$

F11	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$	1	1	0	1
A	1	0	0	1

$\overline{C}$

Opa!
Mas é posível simplificar mais! Vejamos…

Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de “1s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

Exemplo 11:

$F11 = \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B}$

$\overline{A} \cdot \overline{B}$

F11	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$	1	1	0	1
A	1	0	0	1

$\overline{C}$

O Mintermo $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$ é compartilhado pelos dois produtos…

Mapas de Karnaugh

Exercício 1:

Para a função dada pelo mapa de Karnaugh abaixo:

- **Encontre a equação mínima em soma de produtos**
- **Desenhe o circuito resultante e calcule seu custo**

S1	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$	1	1	0	0
A	1	0	0	0

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Mapas de Karnaugh

<u>Exercício 2:</u>

Para a função dada pelo mapa de Karnaugh abaixo:

- **Encontre a equação mínima em soma de produtos**
- **Desenhe o circuito resultante e calcule seu custo**

S2	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$	1	1	0	0
A	0	1	1	1

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Mapas de Karnaugh

Exercício 3:

Para a função dada pela equação abaixo:

- **Encontre a equação mínima em soma de produtos**
- **Desenhe o circuito resultante e calcule seu custo**

$$S3(A,B,C) = \sum(1, 2, 4, 6)$$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando produto de somas

1. **Identificar grupos de “0s” adjacentes, os quais podem conter 2, 4, 8, 16, 32 … “0s”**
2. **Para cada grupo, escrever a equação de soma usando somente as variáveis de entrada que são iguais para todos os “0s”**
3. **Se houver mais de um grupo, montar e equação em produto de somas (que já estará simplificada)**

OBS: se algum “0” restar sozinho, sua soma (maxtermo) também deve ser usado na equação em produto de somas

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando produto de somas

1. Identificar grupos de “0s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de soma (já simplificada)
3. Montar a equação em produto de somas

Exemplo 12:

F12 = A+B

F12	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$	0	0	1	1
A	1	1	1	1

A+B

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando produto de somas

1. Identificar grupos de “0s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de soma (já simplificada)
3. Montar a equação em produto de somas

Exemplo 13:

$F13 = \overline{B}+C$

F13	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$	1	0	1	1
A	1	0	1	1

$B+\overline{C}$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando produto de somas

1. Identificar grupos de “0s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de soma (já simplificada)
3. Montar a equação em produto de somas

Exemplo 14:

F14 = A+C

F14	$\bar{B}\bar{C}$	$\bar{B}C$	BC	$B\bar{C}$
$\bar{A}$	0	1	1	0
A	1	1	1	1

A+C

As duas “células” extremas de uma mesma linha também são consideradas adjacentes.

Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando produto de somas

1. Identificar grupos de "0s" adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de soma (já simplificada)
3. Montar a equação em produto de somas

Exemplo 15:

$F15 = (A+B) \cdot (\overline{A}+\overline{B}+C)$

F15	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$	0	0	1	1
A	1	1	1	0

$A+B$

$\overline{A}+\overline{B}+C$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando produto de somas

1. Identificar grupos de “0s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de soma (já simplificada)
3. Montar a equação em produto de somas

Exemplo 16:

$F16 = \bar{A}$

F16	$\bar{B}\bar{C}$	$\bar{B}C$	BC	$B\bar{C}$
$\bar{A}$	1	1	1	1
A	0	0	0	0

$\bar{A}$

Trata-se de um grupo de 4 “0s” ocupando uma linha inteira do mapa de Karnaugh

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando produto de somas

1. Identificar grupos de “0s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de soma (já simplificada)
3. Montar a equação em produto de somas

Exemplo 17:

$F17 = \overline{B}$

F17	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$	1	1	0	0
A	1	1	0	0

$\overline{B}$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Mapas de Karnaugh

Exercício 4:

Para a função dada pelo mapa de Karnaugh abaixo:

- **Encontre a equação mínima em produto de somas**
- **Desenhe o circuito resultante e calcule seu custo**

S4	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$	1	1	0	0
A	0	1	1	1

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Mapas de Karnaugh

Exercício 5:

Para a função dada pelo mapa de Karnaugh abaixo:

- **Encontre a equação mínima em produto de somas**
- **Desenhe o circuito resultante e calcule seu custo**

S5	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$	1	1	0	0
A	1	0	0	0

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Mapas de Karnaugh

Exercício 6:

Para a função dada pela equação abaixo:

- **Encontre a equação mínima em produto de somas**
- **Desenhe o circuito resultante e calcule seu custo**

$$S6(A,B,C) = \sum(1, 2, 4, 6)$$