Universidade Federal de Pelotas
Instituto de Física e Matemática
Departamento de Informática
Bacharelado em Ciência da Computação

Técnicas Digitais

Aula 4

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos:

Propriedades e Teoremos da Álgebra Booleana
e Minimização Algébrica

Prof. José Luís Güntzel

guntzel@ufpel.edu.br

www.ufpel.edu.br/~guntzel/TD/TD.html

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Leis e Propriedades da Álgebra Booleana

Sejam A e B duas variáveis Booleanas.

Se A ≠ 0, então A=1

Se A ≠ 1, então A=0

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Propriedades da Adição Lógica

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(1) $A+0= \ A$

(2) $A+1= \ 1$

(3) $A+A= \ A$

(4) $A+\overline{A}= \ 1$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Propriedades da Multiplição Lógica

A	B	A·B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(5) $A \cdot 0 = 0$

(6) $A \cdot 1 = A$

(7) $A \cdot A = A$

(8) $A \cdot \overline{A} = 0$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Propriedade da Complementação

$$(9)\ \overline{\overline{A}} = A$$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Propriedade da Comutatividade

$$(10)\quad A + B = B + A$$

$$(11)\quad A \cdot B = B \cdot A$$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Propriedade da Associatividade

(12) $A + (B + C) = (A + B) + C = (A + C) + B$

(13) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = (A \cdot C) \cdot B$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Propriedade Distributiva
(da multiplicação em relação à adição)

$$\text{(14)}\quad A \cdot (B + C) \xrightarrow{\text{expansão}} A \cdot B + A \cdot C$$

$$A \cdot B + A \cdot C \xrightarrow{\text{fatoração}} A \cdot (B + C)$$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Teoremas de De Morgan

Forma Geral

(1) $\overline{A \cdot B \cdot C \cdot \ldots} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \ldots$

(2) $\overline{A + B + C + \ldots} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \ldots$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Teoremas de De Morgan

Em particular, para duas variáveis:

(1) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

(2) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Simplificação Algébrica

Redução do número de literais ou de operações na equação Booleana, através da aplicação das propriedades da Álgebra Booleana

$$F = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

Pela prop. (14), $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

$$F = \overline{A}B(\overline{C} + C) + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

Pela prop. (4), $\overline{C} + C = 1$

$$F = \overline{A}B \cdot 1 + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

Pela prop. (6), $\overline{A}B \cdot 1 = \overline{A}B$

$$F = \overline{A}B + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

Soma de Produtos simplificada

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Simplificação Algébrica

Entretanto, o termo $\overline{A}B\overline{C}$ poderia ter sido simplificado com o termo $AB\overline{C}$

$$F = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

Como fazer isso?

Utilizando a propriedade (3), que permite a seguinte manipulação:

$$\overline{A}B\overline{C} = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Simplificação Algébrica

$$F = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$$

Pela prop. (3), $\overline{A}B\overline{C} = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$

Pela prop. (14)

$$F = \overline{A}B(\overline{C} + C) + A\overline{B}C + (A + \overline{A})B\overline{C}$$

Pela prop. (4)

$$F = \overline{A}B \cdot 1 + A\overline{B}C + 1 \cdot B\overline{C}$$

Pela prop. (6)

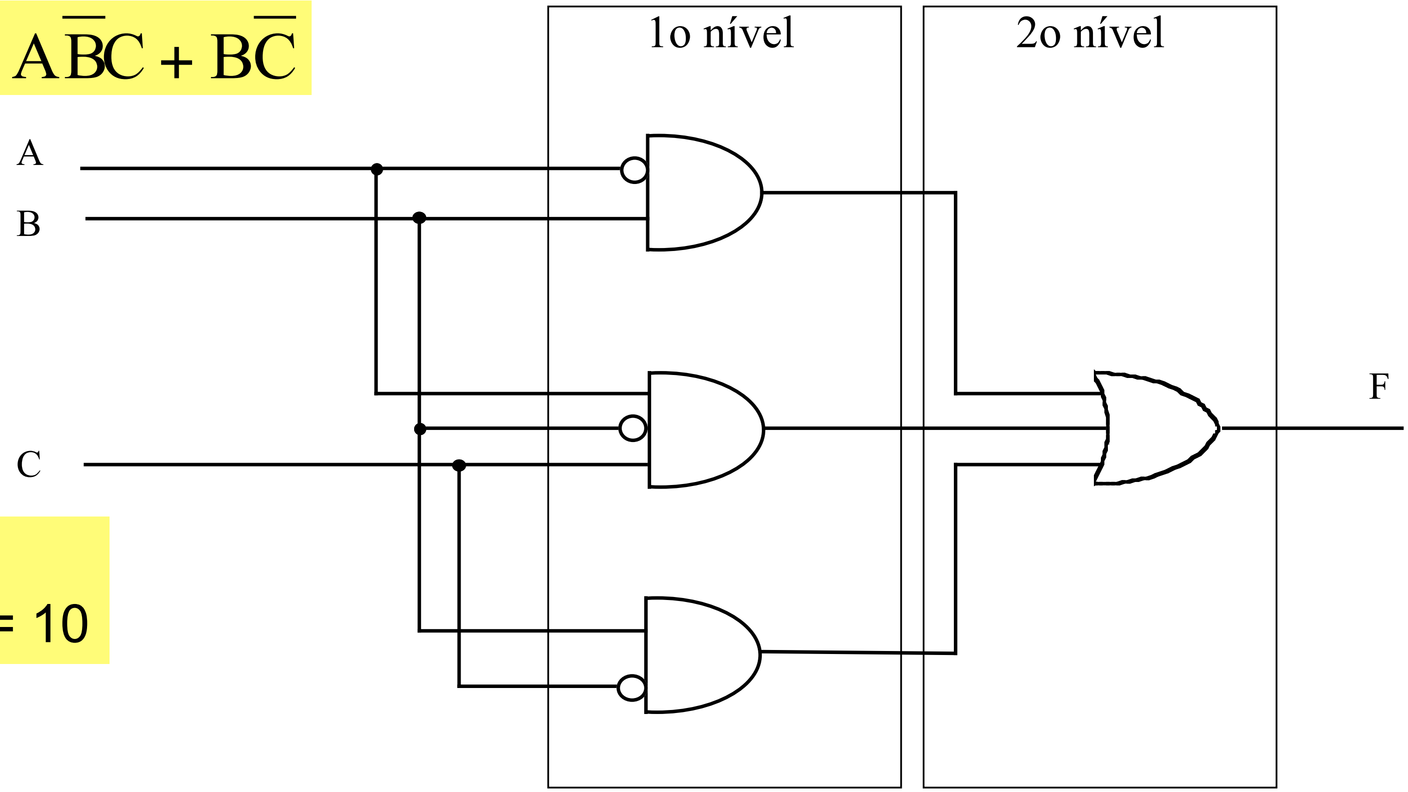
$$F = \overline{A}B + A\overline{B}C + B\overline{C}$$

Soma de Produtos simplificada (mínima, no caso)

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Circuito Lógico

$$F = \overline{A}B + A\overline{B}C + B\overline{C}$$



custo:
2x2 + 2x3 = 10

Soma de produtos (simplificada) → **Circuito com (lógica de) 2 níveis**

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Simplificação Algébrica

As vezes, a **fatoração** pode reduzir o número de operações, resultando num circuito mais simples

$$F = \overline{A}B + A\overline{B}C + B\overline{C}$$

Pela prop. (14), $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

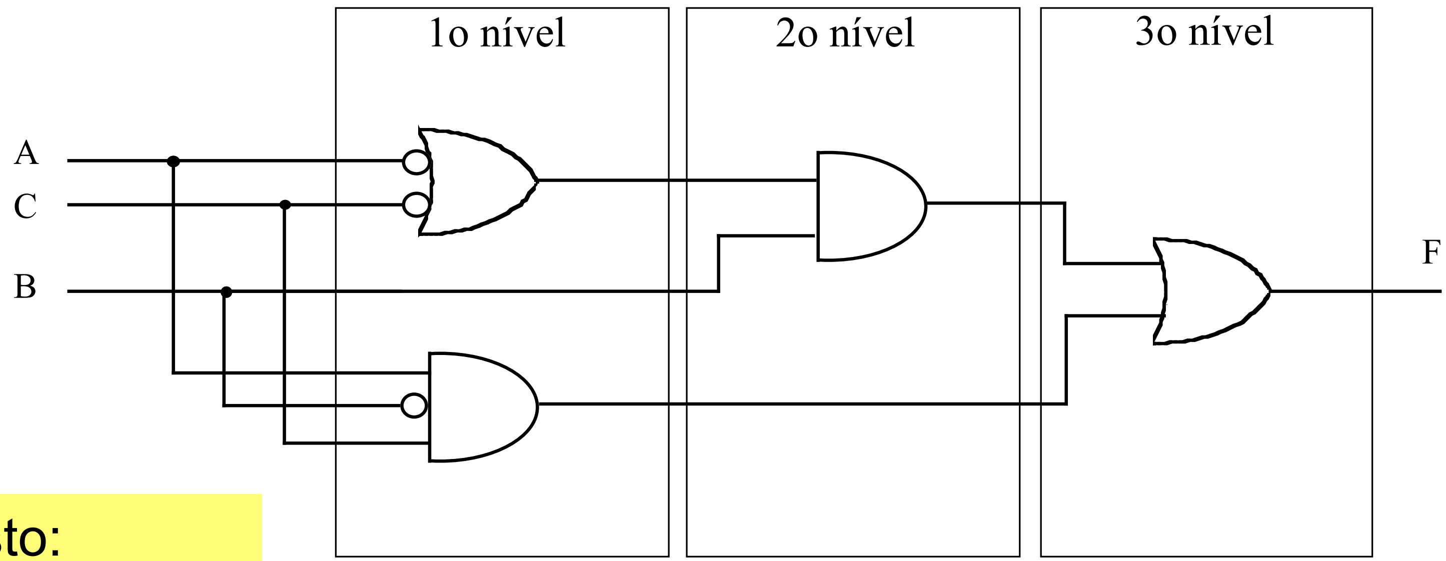
$$F = B(\overline{A} + \overline{C}) + A\overline{B}C$$

Forma Fatorada (Não-padrão)

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Circuito Lógico

$$F = B(\overline{A} + \overline{C}) + A\overline{B}C$$



custo:
3x2 + 1x3 = 9

Forma fatorada ➔ **Circuito (lógica) multinível**