Universidade Federal de Pelotas
Instituto de Física e Matemática
Departamento de Informática
Bacharelado em Ciência da Computação

Técnicas Digitais

Aula 3

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos:

Síntese de circuitos lógicos com soma de produtos e com produto de somas

Prof. José Luís Güntzel

guntzel@ufpel.edu.br

www.ufpel.edu.br/~guntzel/TD/TD.html

Síntese com Soma de Produtos

Seja a função F, com a seguinte tabela-verdade

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$\rightarrow A \cdot B \cdot C$

Ora, é fácil obter uma expressão para esta função.

É a própria função E

$$F = A \cdot B \cdot C$$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Síntese com Soma de Produtos

E se o 1 estiver em outro lugar?

Considere a função F1, com a seguinte tabela-verdade

A	B	C	F1
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	**1**
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Usaremos diretamente a definição da operação E: o resultado é 1 se todas as entradas forem 1.

Assim, teremos que usar um termo produto tal que quando A=0, B=1 e C=0, este termo resulta em 1.

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Síntese com Soma de Produtos

A	B	C	F1
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	**1** → $\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Repare que $\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}=1$ somente se $A=0$, $B=1$ e $C=0$.

Em qualquer outro caso, $\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}=0$

$$F1 = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Síntese com Soma de Produtos

E se houver duas posições valendo 1?

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	**1**
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	**1**

Iremos separar esta função em duas funções S' e S".

Cada uma das novas funções vai ficar com um 1 da função original.

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Síntese com Soma de Produtos

E se houver duas posições valendo 1?

A	B	C	S	S'	S"
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	**1**	**1**	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	**1**	0	**1**

Note que, se fizermos o OU da coluna S' com a coluna S", obteremos exatamente a coluna S. Portanto:

$$S = S' + S''$$

$$S = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C$$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Síntese com Soma de Produtos

Conclusões:

- **Cada 1 de uma função pode ser representado por um produto lógico (E) no qual todas as variáveis de entrada estão presentes (tais produtos são chamados mintermos ou minitermos)**
- **Cada mintermo é único, pois representa uma e somente uma posição que vale 1**
- **Uma função pode ser representada por uma soma lógica (OU) dos seus mintermos.**

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Síntese com Soma de Produtos

Lista dos possíveis mintermos para funções com 3 variáveis de entradas

A	B	C	mintermos
0	0	0	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$
0	0	1	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$
0	1	0	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$
0	1	1	$\overline{A}\cdot B\cdot C$
1	0	0	$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$
1	0	1	$A\cdot\overline{B}\cdot C$
1	1	0	$A\cdot B\cdot\overline{C}$
1	1	1	$A\cdot B\cdot C$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Síntese com Soma de Produtos

Exemplo 2.1: encontre a equação em soma de produtos (soma de mintermos) para a função que segue. Desenhe o circuito lógico para a equação encontrada.

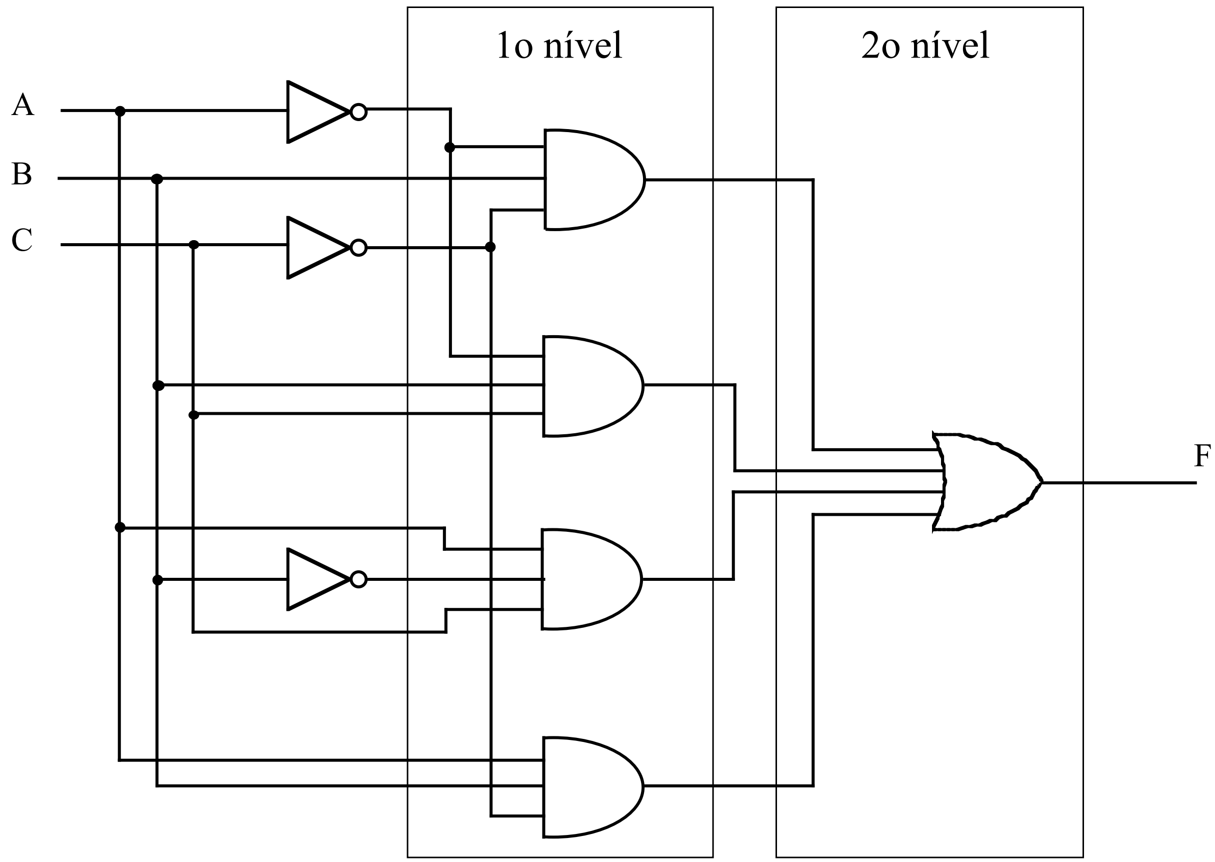
A	B	C	F	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	**1**	$\rightarrow \bar{A}\cdot B\cdot \bar{C}$
0	1	1	**1**	$\rightarrow \bar{A}\cdot B\cdot C$
1	0	0	0	
1	0	1	**1**	$\rightarrow A\cdot \bar{B}\cdot C$
1	1	0	**1**	$\rightarrow A\cdot B\cdot \bar{C}$
1	1	1	0	

$$F = \bar{A}\cdot B\cdot \bar{C} + \bar{A}\cdot B\cdot C + A\cdot \bar{B}\cdot C + A\cdot B\cdot \bar{C}$$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

circuito lógico para $F = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C}$

versão 1

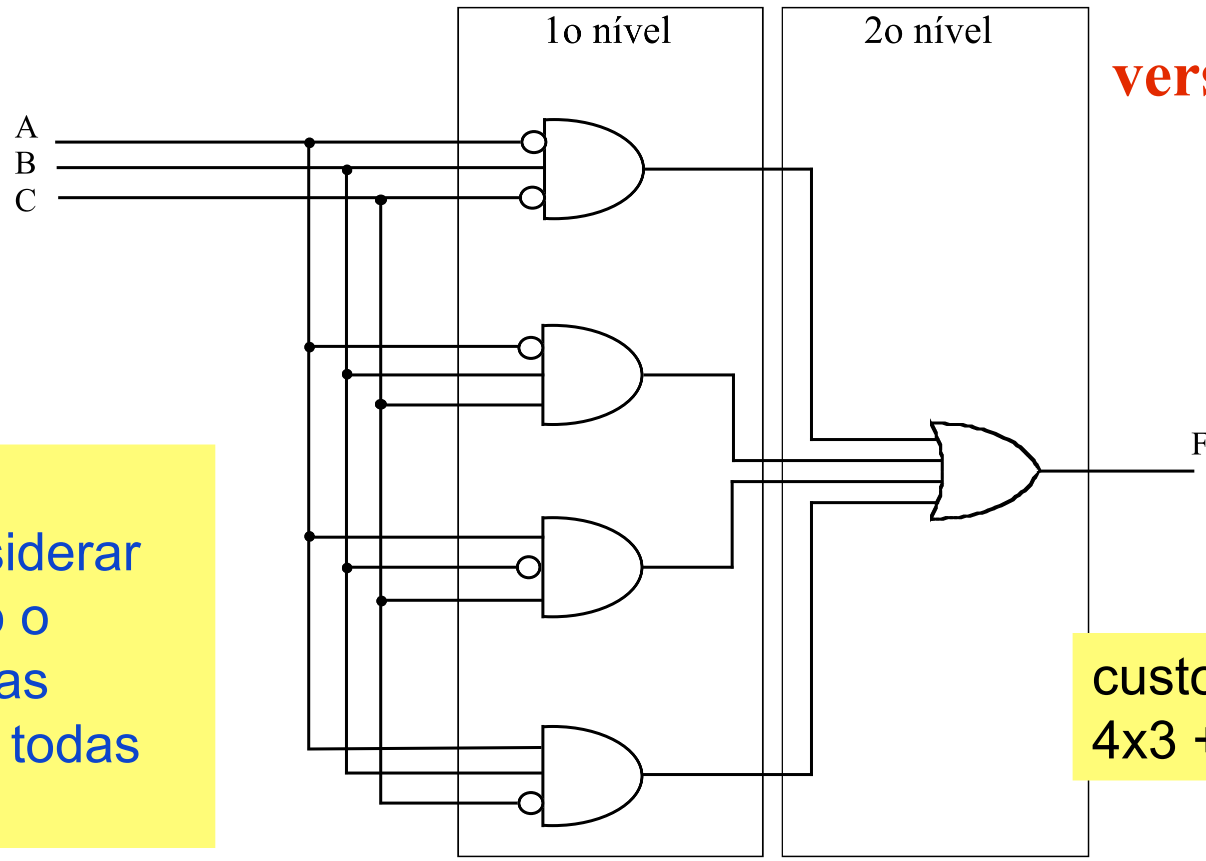


2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

circuito lógico para

$F = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C}$

versão 2



Custo:
Iremos considerar como sendo o somatório das entradas de todas as portas

custo:
4x3 + 1X4 = 16

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Síntese com Produto de Somas

Seja a função P, com a seguinte tabela-verdade

A	B	C	P
0	0	0	**0**
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$\rightarrow$ A+B+C

Ora, é fácil obter uma expressão para esta função.

É a própria função OU

$$P = A+B+C$$

Síntese com Produto de Somas

Pergunta: quantas funções Booleanas com 2 entradas existem?

Refletir…

Síntese com Produto de Somas

E se o 0 estiver em outro lugar?

Considere a função P1, com a seguinte tabela-verdade

A	B	C	P1
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	**0**
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Usaremos diretamente a definição da operação OU: o resultado é 0 se todas as entradas forem 0.

Assim, teremos que usar um termo soma tal que quando A=1, B=0 e C=0, este termo resulta em 0.

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Síntese com Produto de Somas

A	B	C	P1
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	**0**
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$\rightarrow \overline{A}+B+C$

Note que $\overline{A}+B+C=\mathbf{0}$ **somente se** $A=1$, $B=0$ **e** $C=0$.

Em qualquer outro caso, $\overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}=\mathbf{1}$

$$P1 = \overline{A}+B+C$$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Síntese com Produto de Somas

E se houver duas posições valendo 0?

A	B	C	P	P'	P"
0	0	0	**0**	1	**0**
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	**0**	**0**	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Note que, se fizermos o E da coluna P' com a coluna P", obteremos exatamente a coluna P. Portanto:

$$P = P' \cdot P''$$

$$P = (A+B+C) \cdot (\bar{A}+B+C)$$

Repare que no caso de produto de somas os parêntesis são obrigatórios

Síntese com Produto de Somas

Conclusões:

- **Cada 0 de uma função pode ser representado por uma soma lógica (OU) na qual todas as variáveis de entrada estão presentes (tais somas são chamadas maxtermos ou maxitermos)**
- **Cada maxtermo é único, pois representa uma e somente uma posição que vale 0**
- **Uma função pode ser representada por um produto lógico (E) dos seus maxtermos.**

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Síntese com Produto de Somas

Lista dos possíveis maxtermos para funções com 3 variáveis de entradas

A	B	C	maxtermos
0	0	0	$A+B+C$
0	0	1	$A+B+\overline{C}$
0	1	0	$A+\overline{B}+C$
0	1	1	$A+\overline{B}+\overline{C}$
1	0	0	$\overline{A}+B+C$
1	0	1	$\overline{A}+B+\overline{C}$
1	1	0	$\overline{A}+\overline{B}+C$
1	1	1	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Síntese Produto de Somas

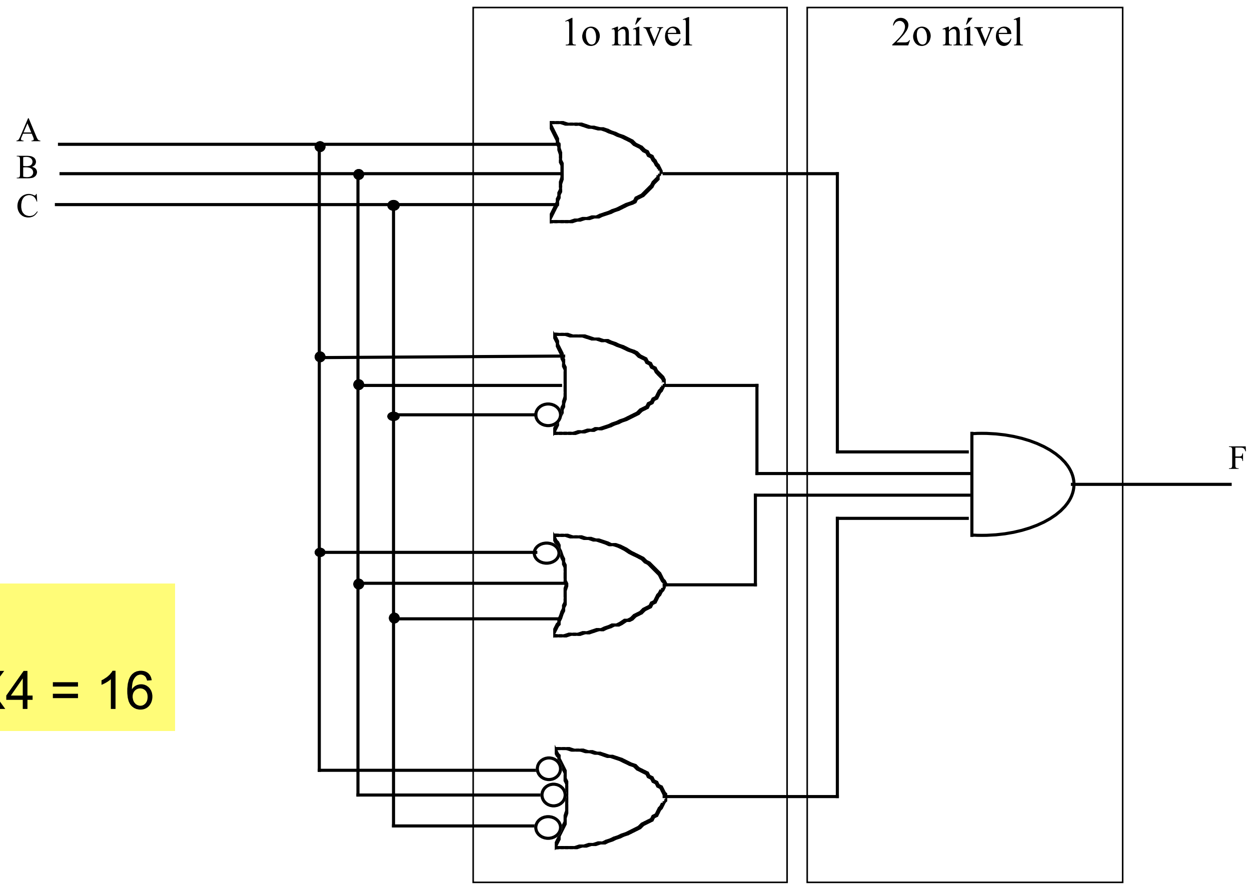
Exemplo 2.1: encontre a equação em produto de somas (produto de maxtermos) para a função que segue. Desenhe o circuito lógico para a equação encontrada.

A	B	C	F	
0	0	0	**0**	$\rightarrow A+B+C$
0	0	1	**0**	$\rightarrow A+B+\overline{C}$
0	1	0	1	
0	1	1	1	
1	0	0	**0**	$\rightarrow \overline{A}+B+C$
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	**0**	$\rightarrow \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

$$F = (A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(\overline{A}+B+C)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

circuito lógico para $F = (A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(\overline{A}+B+C)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$



custo:
4x3 + 1X4 = 16

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Formas Canônicas: Notação Compacta

A	B	C	F
0	0	0	**0**
0	0	1	**0**
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	**0**
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	**0**

Soma de mintermos

$$F = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

$$F = m_2 + m_3 + m_5 + m_6$$

$$F = \sum(2,3,5,6)$$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Formas Canônicas: Notação Compacta

Produto de maxtermos

A	B	C	F
0	0	0	**0**
0	0	1	**0**
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	**0**
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	**0**

$$F = (A + B + C) \cdot (A + B + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + B + C) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$$

$$F = M_0 \cdot M_1 \cdot M_4 \cdot M_7$$

$$F = \prod (0,1,4,7)$$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Formas Canônicas: Resumo

A	B	C	F
0	0	0	**0**
0	0	1	**0**
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	**0**
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	**0**

Soma de mintermos

$$F = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

$$F = m_2 + m_3 + m_5 + m_6$$

$$F = \sum(2,3,5,6)$$

Produto de maxtermos

$$F = (A + B + C) \cdot (A + B + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + B + C) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$$

$$F = M_0 \cdot M_1 \cdot M_4 \cdot M_7$$

$$F = \prod(0,1,4,7)$$