Universidade Federal de Pelotas
Instituto de Física e Matemática
Departamento de Informática
Bacharelado em Ciência da Computação

Técnicas Digitais

750053

Aula 2

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos:

Funções lógicas e portas lógicas. Expressões lógicas: ordem de precedência dos operadores, avaliação e circuitos lógicos.

Prof. José Luís Güntzel

guntzel@ufpel.edu.br

www.ufpel.edu.br/~guntzel/TD/TD.html

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Álgebra Booleana

Uma álgebra é definida por:

- **Um conjunto de operações válidas**
- **Um conjunto de valores que cada variável pode assumir**

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Álgebra Booleana

- Proposta pelo matemático inglês **George Boole**, em 1854
- Assume um número finito de valores possíveis para as variáveis
- Definida por operações básicas sobre os valores possíveis e por teoremas

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Álgebra Booleana

- **Em 1934, Claude Shannon propôs o uso de um subconjunto da Álgebra Booleana para modelar o funcionamento de circuitos a relés**
- **Este subconjunto assumia apenas dois valores possíveis para cada variável e ficou conhecido por Álgebra de Chaveamento (*Switching Algebra*)**
- **Hoje em dia, o projeto de sistemas digitais é baseado na Álgebra de Chaveamento**
- **Entretanto, a maior parte da literatura a chama simplesmente de Álgebra Booleana (e nós também…)**

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Álgebra Booleana

Valores das Variáveis:

Seja $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A \in \{0,1\}$ ({F,V}, {high, low}, {on, off}…)

Dizendo de outra maneira:

Se $A \neq 0 \Rightarrow A = 1$

Se $A \neq 1 \Rightarrow A = 0$

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Álgebra Booleana

Associação da Álgebra Booleana com Eletrônica Digital:

Valor lógico	Nível lógico	Nível de tensão (tec. 2.0 µm)	Nível de tensão (tec. 0.5 µm)	Nível de tensão (tec. 0.13 µm)
F	0	0 V	0 V	0 V
V	1	5 V	3.3 V	1.5 V

Operações Básicas da Álgebra Booleana

Sejam $A, B \in \mathcal{B}$

1. Complemento (“NOT”)

(Também denominada de “negação” ou “inversão”)

- É uma operação unária (i.e., só pode ser aplicada sobre uma variável por vez)
- Tem como resultado, o valor oposto ao valor original da variável de entrada

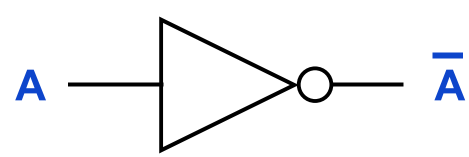
Símbolos:

$\{ \overline{A}, \sim A, \neg A, A', NOT(A) \}$
(lê-se “A negado”)

Tabela-verdade:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Porta Lógica (representação gráfica):



2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Operações Básicas da Álgebra Booleana

2. Operação "E" ("AND")

(Também denominada de "multiplicação lógica")

Definição 1: a operação "E" resulta 1 se e somente se todas as variáveis de entrada valerem 1.

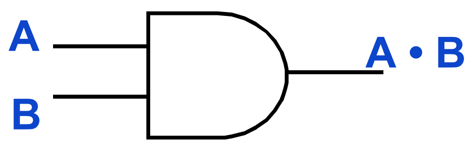
Símbolos:

{ • , ∧ }

Tabela-verdade:

A	B	A • B
0	0	**0**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**

Porta Lógica (representação gráfica):



2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Operações Básicas da Álgebra Booleana

2. Operação “E” (“AND”)

(Também denominada de “multiplicação lógica”)

Definição 2: a operação “E” resulta **0** se ao menos uma das variáveis de entrada valer **0**.

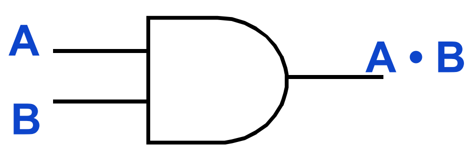
Símbolos:

{ • , ∧ }

Tabela-verdade:

A	B	A • B
0	0	**0**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**

Porta Lógica (representação gráfica):



2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Operações Básicas da Álgebra Booleana

3. Operação "OU" ("OR")

(Também denominada de "adição lógica")

Definição 1: a operação "OU" resulta **1** se ao menos uma das variáveis de entrada valer **1**.

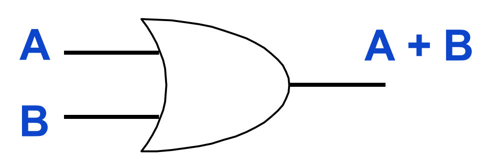
Símbolos:

{ + , v }

Tabela-verdade:

A	B	A + B
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**1**

Porta Lógica (representação gráfica):



2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Operações Básicas da Álgebra Booleana

3. Operação “OU” (“OR”)

(Também denominada de “adição lógica”)

Definição 2: a operação “OU” resulta 0 se e somente se todas variáveis de entrada valerem 0.

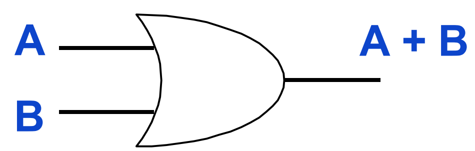
Símbolos:

{ + , v }

Tabela-verdade:

A	B	A + B
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**1**

Porta Lógica (representação gráfica):



2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Operações Básicas da Álgebra Booleana

Comparando as Definições...

Operação "E"	Operação "OU"
Definição 1: a operação "E" resulta 1 se e somente se todas as variáveis de entrada valerem 1.	Definição 1: a operação "OU" resulta 1 se ao menos uma das variáveis de entrada valer 1.
Definição 2: a operação "E" resulta 0 se ao menos uma das variáveis de entrada valer 0.	Definição 2: a operação "OU" resulta 0 se e somente se todas variáveis de entrada valerem 0.

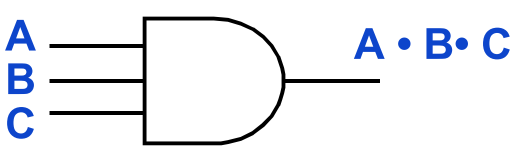
2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Operações Básicas da Álgebra Booleana

2. Operação “E” (“AND”) com 3 variáveis de entrada

Definição 1: a operação “E” resulta 1 se e somente se todas as variáveis de entrada valerem 1.

Porta Lógica



A	B	C	A • B• C
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	**1**

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Operações Básicas da Álgebra Booleana

2. Operação “E” (“AND”): Propriedade Comutativa

As variáveis de entrada podem ser operadas em qualquer ordem

A	B	C	A • B• C
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	**1**

≡

A	B	C	B • A• C
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	**1**

≡

A	B	C	C • A• B
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	**1**

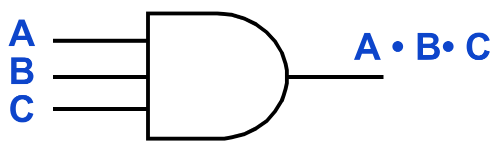
≡ ...

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

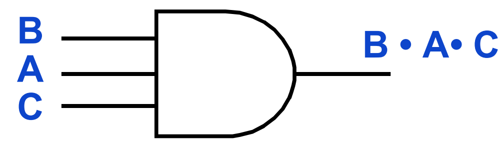
Operações Básicas da Álgebra Booleana

2. Operação "E" ("AND"): Propriedade Comutativa

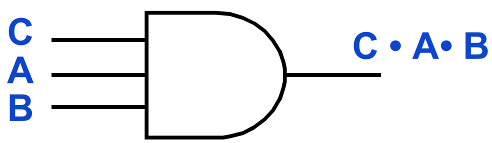
Em termos de portas lógicas, isto equivale a …



≡



≡



≡ …

<u>Conclusão</u>: as entradas da porta "E" são funcionalmente equivalentes.

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Operações Básicas da Álgebra Booleana

2. Operação "E" ("AND"): Propriedade Associativa

As variáveis de entrada podem ser operadas de duas em duas (ou de três em três, ou de quatro em quatro…)

A	B	C	A • B• C	(A • B)• C	A • (B• C)	(A •C)• B
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	**1**	**1**	**1**	**1**

…

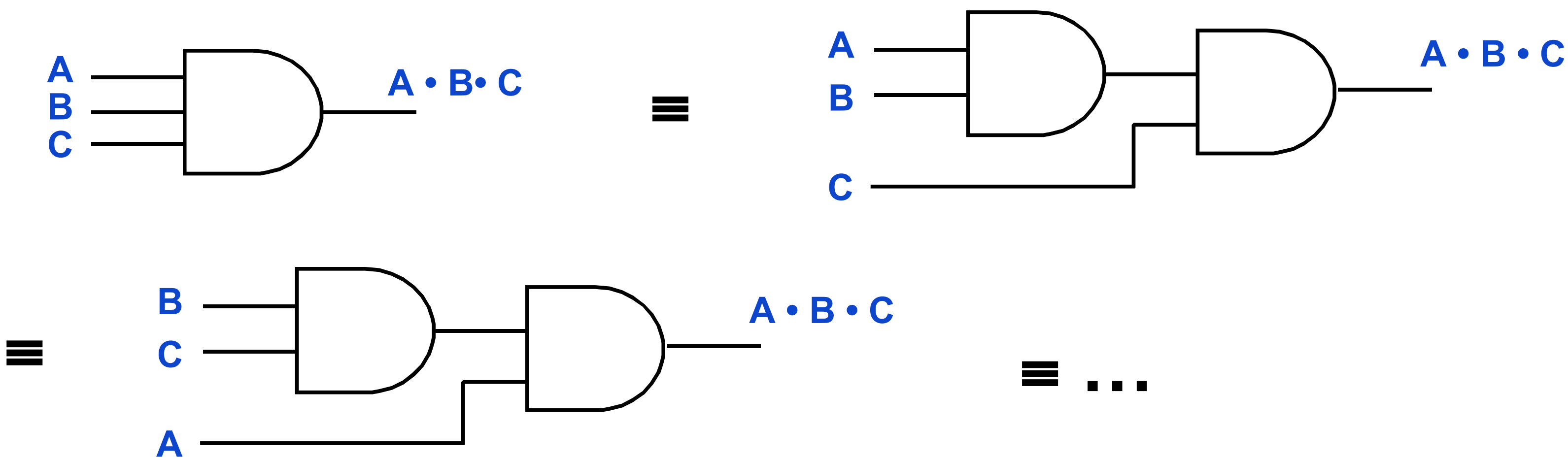
Os parêntesis indicam ordem de precedência

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Operações Básicas da Álgebra Booleana

2. Operação “E” (“AND”): Propriedade Comutativa

Em termos de portas lógicas, isto equivale a …



Conclusão: é possível decompor-se uma operação “E” de mais de duas entradas em uma associação de operações “E” de duas entradas.

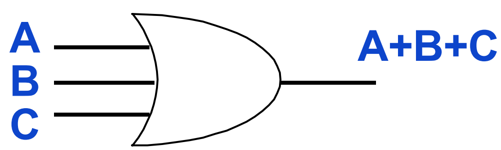
2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Operações Básicas da Álgebra Booleana

3. Operação "OU" ("OR") com 3 variáveis de entrada

Definição 1: a operação "OU" resulta **1** se ao menos uma das variáveis de entrada valer **1**.

Porta Lógica



A	B	C	A+B+C
0	0	0	0
0	0	1	**1**
0	1	0	**1**
0	1	1	**1**
1	0	0	**1**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Operações Básicas da Álgebra Booleana

3. Operação "OU" ("OR"): Propriedade Comutativa

As variáveis de entrada podem ser operadas em qualquer ordem

A	B	C	A+B+C
0	0	0	0
0	0	1	**1**
0	1	0	**1**
0	1	1	**1**
1	0	0	**1**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

$\equiv$

A	B	C	B+A+C
0	0	0	0
0	0	1	**1**
0	1	0	**1**
0	1	1	**1**
1	0	0	**1**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

$\equiv$

A	B	C	C+A+B
0	0	0	0
0	0	1	**1**
0	1	0	**1**
0	1	1	**1**
1	0	0	**1**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

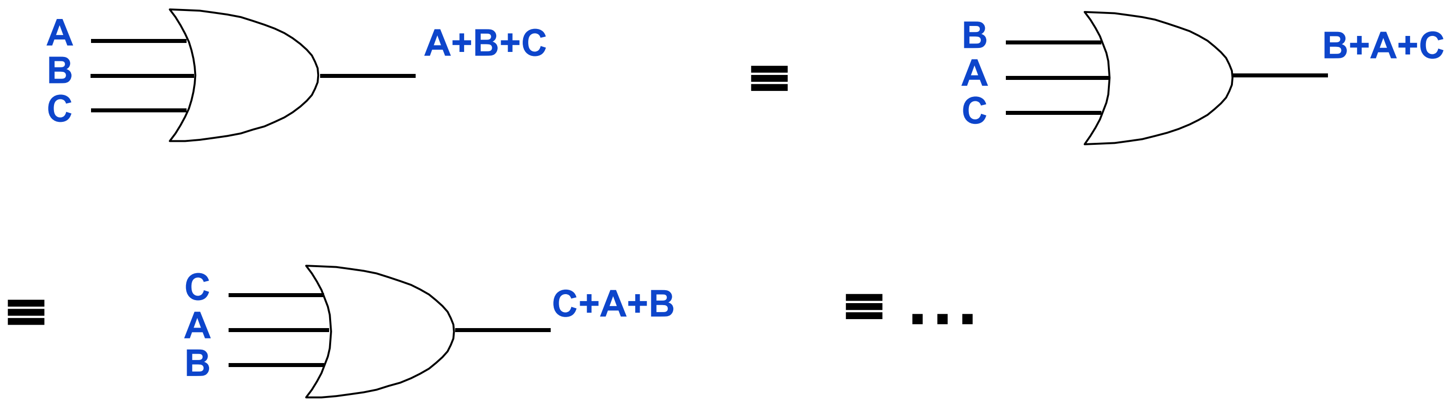
$\equiv$ ...

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Operações Básicas da Álgebra Booleana

3. Operação “OU” (“OR”): Propriedade Comutativa

Em termos de portas lógicas, isto equivale a …



<u>Conclusão</u>: as entradas da porta “OU” são funcionalmente equivalentes.

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Operações Básicas da Álgebra Booleana

3. Operação "OU" ("OR"): Propriedade Associativa

As variáveis de entrada podem ser operadas de duas em duas (ou de três em três, ou de quatro em quatro...)

A	B	C	A+B+C	(A+B)+C	A+(B+C)	(A+C)+B
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

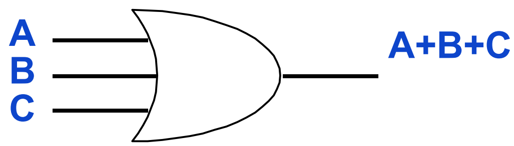
...

Os parêntesis indicam ordem de precedência

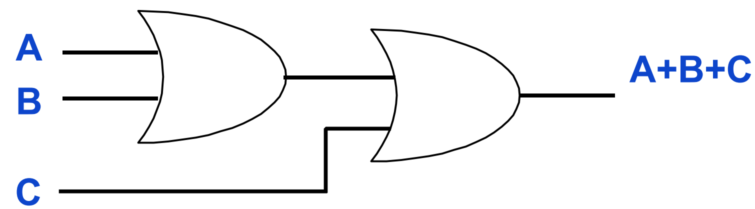
Operações Básicas da Álgebra Booleana

3. Operação “OU” (“OR”): Propriedade Comutativa

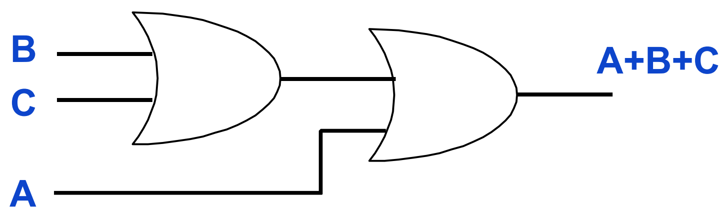
Em termos de portas lógicas, isto equivale a …



≡



≡



≡ …

<u>Conclusão</u>: é possível decompor-se uma operação “OU” de mais de duas entradas em uma associação de operações “OU” de duas entradas.

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Avaliação de Expressões Booleanas

- **Dada a equação que descreve uma função Booleana F, deseja-se saber qual o comportamento de F**
- **Podemos montar a tabela-verdade para F**
- **Este procedimento é conhecido como avaliação de uma expressão Booleana**

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Avaliação de Expressões Booleanas

Montando a tabela-verdade de uma equação

- Identificar as variáveis de entrada
- Para cada variável de entrada, destinar uma coluna mais à esquerda, na tabela-verdade
- Criar colunas à direita, conforme a ordem de precedência das operações contidas na equação que se está avaliando

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Avaliação de Expressões Booleanas

Montando a tabela-verdade de uma equação

Exemplo: monte a tabela-verdade para a equação

$$F = X \bullet (Y + \overline{Z})$$

- Há três variáveis de entrada: X, Y e Z.
- Então, a tabela-verdade para esta equação conterá três colunas à esquerda
- De modo geral, a tabela-verdade para uma equação com *n* variáveis de entrada conterá 2^n linhas à esquerda

X	Y	Z

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Avaliação de Expressões Booleanas

Montando a tabela-verdade de uma equação

- Nestas colunas deve-se enumerar todas as combinações das variáveis de entrada (normalmente, em ordem crescente do número binário que elas podem representar)

X	Y	Z
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Avaliação de Expressões Booleanas

Ordem de Avaliação de Expressões Booleanas (Ordem Precedência dos Operadores)

Do nível de parêntesis mais interno para o nível mais externo

1. **Complemento de variável individual**
2. **Operação "E"**
3. **Operação "OU"**

OBS: complemento de expressão deve ser analisado assim que a expressão a ser complementada for avaliada.

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Avaliação de Expressões Booleanas

Continuando o exemplo:

$$F = X \bullet (Y + \overline{Z})$$

- **Criar uma coluna para avaliar $\overline{Z}$**

X	Y	Z	$\overline{Z}$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Avaliação de Expressões Booleanas

Continuando o exemplo:

$$F = X \bullet (Y + \overline{Z})$$

- **Criar uma coluna para avaliar $(Y + \overline{Z})$**

X	Y	Z	$\overline{Z}$	$(Y + \overline{Z})$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Avaliação de Expressões Booleanas

Continuando o exemplo:

$$F = X \bullet (Y + \overline{Z})$$

- Criar uma coluna para avaliar $X \bullet (Y + \overline{Z})$

X	Y	Z	$\overline{Z}$	$(Y + \overline{Z})$	$X \bullet (Y + \overline{Z}) = F$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Circuitos Lógicos

- **Dada uma equação que representa uma função Booleana, é possível representá-la graficamente, por meio de uma associação apropriada de portas lógicas.**
- **Esta associação recebe o nome de circuito lógico.**
- **Com o desenho do circuito lógico, é possível implementar fisicamente uma função Booleana.**
- **O desenho de um circuito lógico deve obedecer à ordem de precedência das operações mostradas na equação lógica que se deseja implementar.**

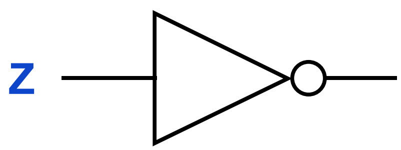
2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Circuitos Lógicos

<u>Exemplo</u>: desenhe o circuito lógico para a equação

$$F = X \bullet (Y + \overline{Z})$$

1. Desenhar a porta inversora que implementa $\overline{Z}$.



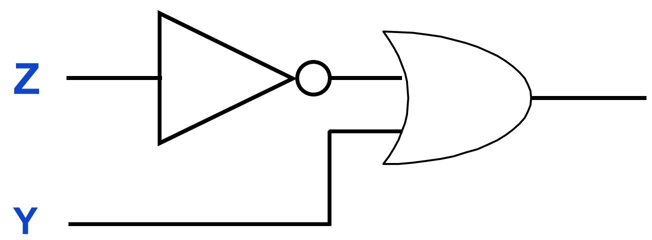
2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Circuitos Lógicos

<u>Exemplo</u>: desenhe o circuito lógico para a equação

$$F = X \bullet (Y + \overline{Z})$$

2. Desenhar a porta "OU" que implementa $(Y + \overline{Z})$.



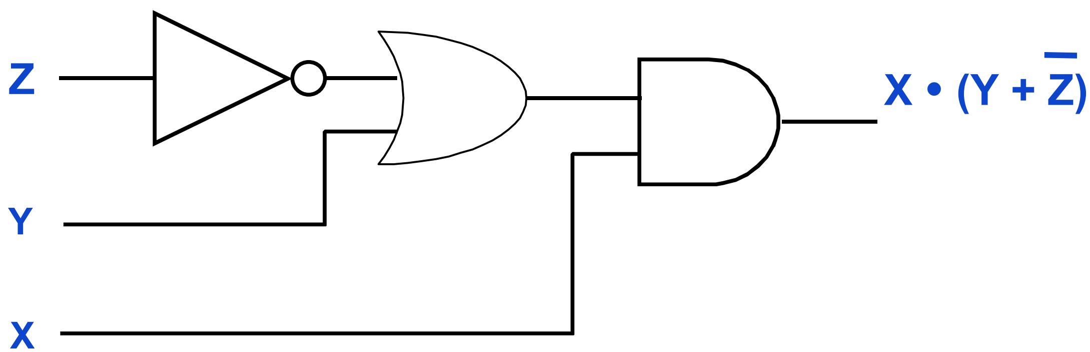
2. Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Circuitos Lógicos

Exemplo: desenhe o circuito lógico para a equação

$$F = X \bullet (Y + \overline{Z})$$

3. Desenhar a porta "E" que implementa $X \bullet (Y + \overline{Z})$.



Exercícios

Exercício 1: avalie a expressão que segue e desenhe seu circuito lógico.

$$S = \overline{A} \bullet C + (B \bullet C + A \bullet \overline{B})$$