Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Departamento de Informática

Bacharelado em Ciência da Computação

Técnicas Digitais

Aula 13

4. Circuitos Combinacionais: Meio somador, somador completo, portas XOR e o somador paralelo.

Prof. José Luís Güntzel

guntzel@ufpel.edu.br

www.ufpel.edu.br/~guntzel/TD/TD.html

4. Circuitos Combinacionais

Revisão da Adição Binária

Adição de Números Sem Sinal

Exemplo

overflow

	1 1 0 0		transportes ("carry")
	1 1 0 0	(12)	
+	0 1 1 0	(6)	
	0 0 1 0	(18)	resultado

- **Note que o maior binário que se pode representar com 4 bits é 15**

4. Circuitos Combinacionais

Revisão da Adição Binária

Adição de Números Sem Sinal

Outro Exemplo

	0 1 1 0 1 1 0 0		transportes
	0 1 1 0 1 1 0 1	(109)	
+	0 1 1 0 0 1 1 0	(102)	
	1 1 0 1 0 0 1 1	(211)	resultado

representação simplificada

$$\begin{array}{r} A \\ +\; B \\ \hline S \end{array}$$

4. Circuitos Combinacionais

Revisão da Adição Binária

```
      0 1 1 0 1 1 0 0
        0 1 1 0 1 1 0 1
  +     0 1 1 0 0 1 1 0
  ---------------------
        1 1 0 1 0 0 1 1    (211)
```

+		a_0	adição de 2 bits
		b_0	
	c_1	s_0	resultado em 2 bits

4. Circuitos Combinacionais

Revisão da Adição Binária

Porém, a partir do 2º bit ...

```
    0 1 1 0 1 1 0 0
      0 1 1 0 1 1 0 1
+     0 1 1 0 0 1 1 0
    ------------------
      1 1 0 1 0 0 1 1    (211)
```

		c_1	
+		a_1	adição de 3 bits
		b_1	
	c_2	s_1	resultado em 2 bits

4. Circuitos Combinacionais

Revisão da Adição Binária

Generalizando, para bits a partir do 2º bit

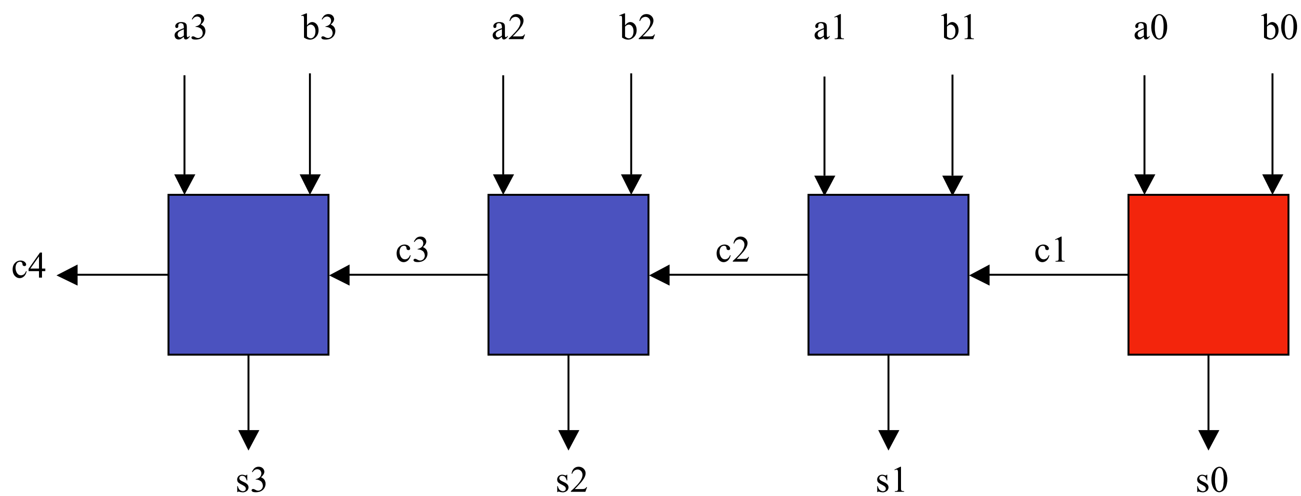
```
   0 1 1 0 1 1 0 0
     0 1 1 0 1 1 0 1
+    0 1 1 0 0 1 1 0
   ------------------
     1 1 0 1 0 0 1 1   (211)
```

$$
\begin{array}{rcl}
 & c_i & \\
+ & a_i & \text{adição de 3 bits} \\
 & b_i & \\
\hline
C_{i+1} & s_i & \text{resultado em 2 bits}
\end{array}
$$

4. Circuitos Combinacionais

Esquema da Soma Paralela

Considerando dois números (A e B) com 4 bits cada



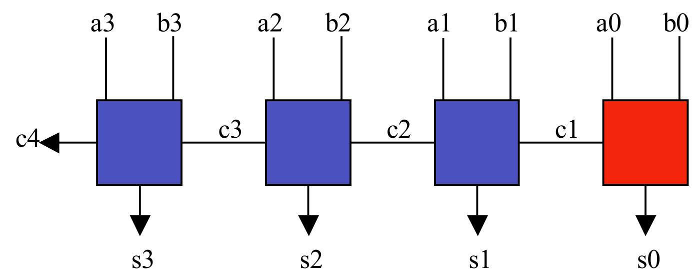
Note que:

- **há um elemento para cada coluna da soma**
- **o sinal de *overflow* será o *carry* mais significativo**

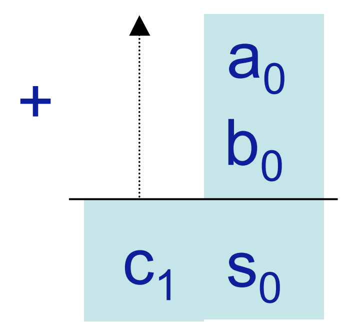
4. Circuitos Combinacionais

Projetando um Somador Paralelo

Projetando um circuito para a primeira coluna




```
  0 1 1 0 1 1 0 0
    0 1 1 0 1 1 0 1
+   0 1 1 0 0 1 1 0
  ------------------
    1 1 0 1 0 0 1 1   (211)
```



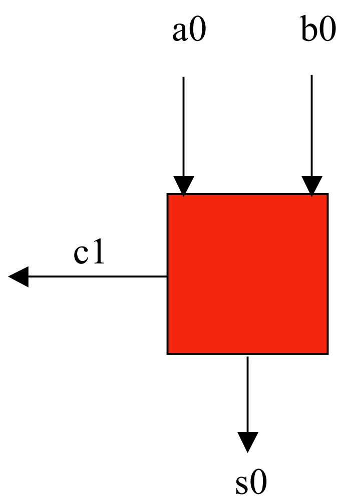
Quantas combinações de 2 bits existem?

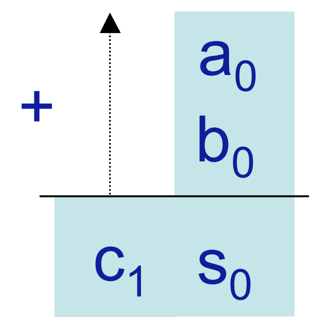
4. Circuitos Combinacionais

Projetando um Somador Paralelo

Projetando um circuito para a primeira coluna

entradas		saídas	
a0	b0	c1	s0
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0





4. Circuitos Combinacionais

Projetando um Somador Paralelo

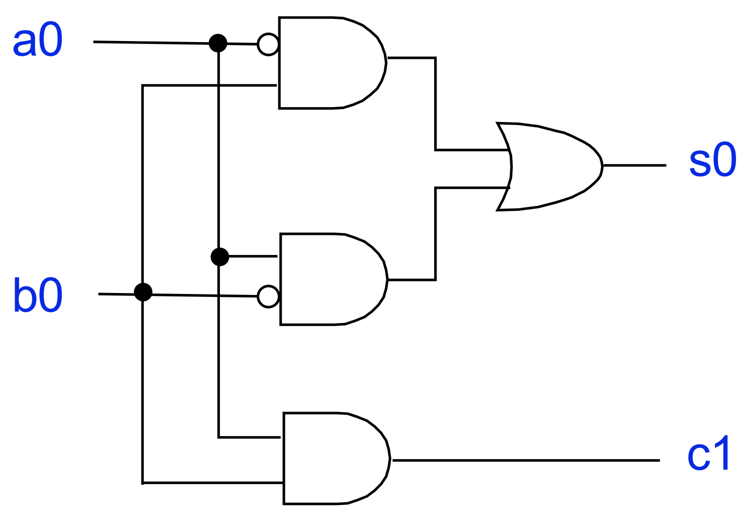
Projetando um circuito para a primeira coluna:

O Meio Somador (MS)

$$s0 = \overline{a0} \cdot b0 + a0 \cdot \overline{b0}$$

$$c1 = a0 \cdot b0$$

entradas		saídas	
a0	b0	c1	s0
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

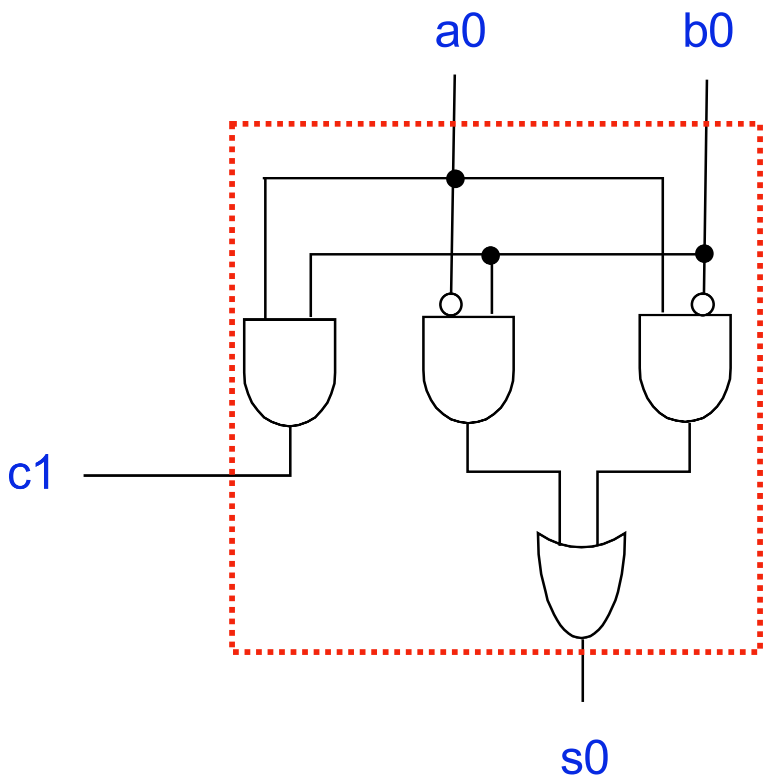


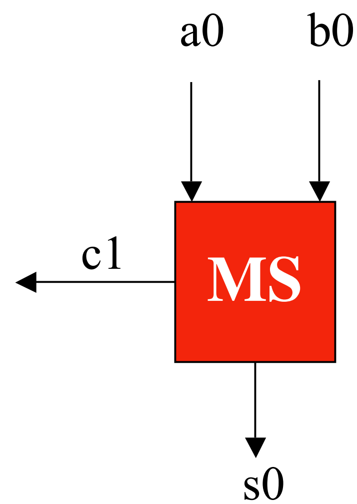
Obs: circuito independente de tecnologia

4. Circuitos Combinacionais

O Meio Somador (*Half Adder*)

Ou, se preferir





$s0 = \overline{a0} \cdot b0 + a0 \cdot \overline{b0}$

$c1 = a0 \cdot b0$

4. Circuitos Combinacionais

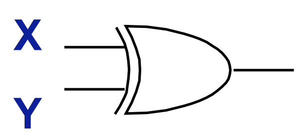
A Função OU Exclusivo

***EXclusive OR* - XOR**

- **A função XOR resulta 1 se um número ímpar de entradas valer 1**
- **Para duas entradas, temos a seguinte tabela-verdade**

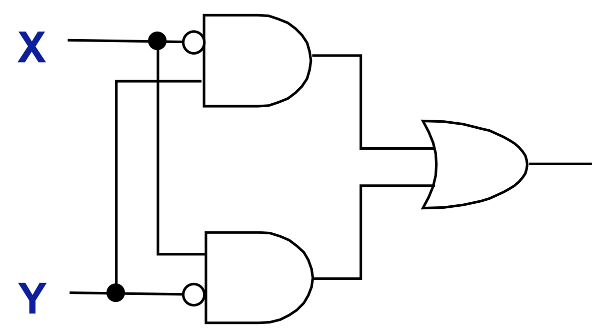
X	Y	$X \oplus Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$X \oplus Y = \overline{X} \cdot Y + X \cdot \overline{Y}$$



símbolo

$\equiv$



4. Circuitos Combinacionais

A Função OU Exclusivo (XOR)

Aplicações 1

A função XOR pode ser usada para comparar dois sinais, da seguinte forma:

- **se $X \oplus Y = 0 \Rightarrow X = Y$**
- **se $X \oplus Y = 1 \Rightarrow X \neq Y$**

X	Y	$X \oplus Y$	
0	0	0	X=Y
0	1	1	
1	0	1	
1	1	0	X=Y

4. Circuitos Combinacionais

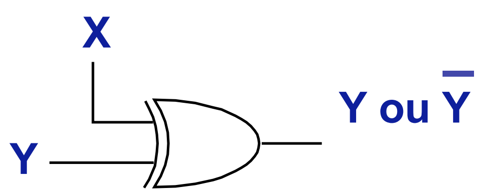
A Função OU Exclusivo (XOR)

Aplicações 2

A função XOR pode ser usada como um **negador controlado**

Assumindo (p.ex.) que X é o controle

- se $X=0 \Rightarrow X \oplus Y = Y$
- se $X=1 \Rightarrow X \oplus Y = \overline{Y}$



X	Y	$X \oplus Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

4. Circuitos Combinacionais

A Função OU Exclusivo (XOR)

Aplicações 3

A função XOR realiza uma adição sem o *carry*

X	Y	$X \oplus Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

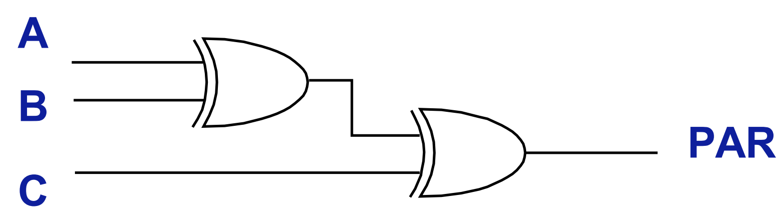
4. Circuitos Combinacionais

A Função OU Exclusivo (XOR)

Aplicações 4

A função XOR pode ser usada para calcular a paridade (seguindo sua própria definição...)

A	B	C	PAR
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1



4. Circuitos Combinacionais

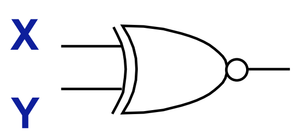
A Função Equivalência (ou Concidência)

***EXclusive NOR* - XNOR**

- **A função XNOR corresponde à função XOR negada**

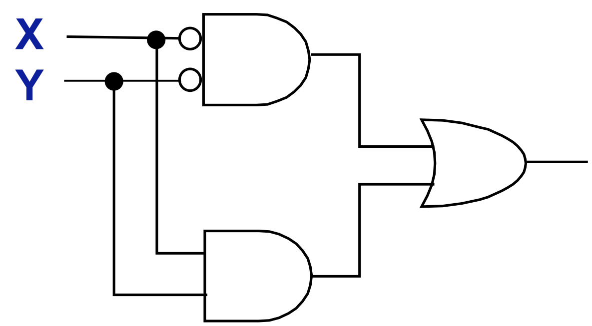
X	Y	$X \odot Y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$X \odot Y = \overline{X}\cdot\overline{Y} + X\cdot Y = \overline{X \oplus Y}$$



símbolo

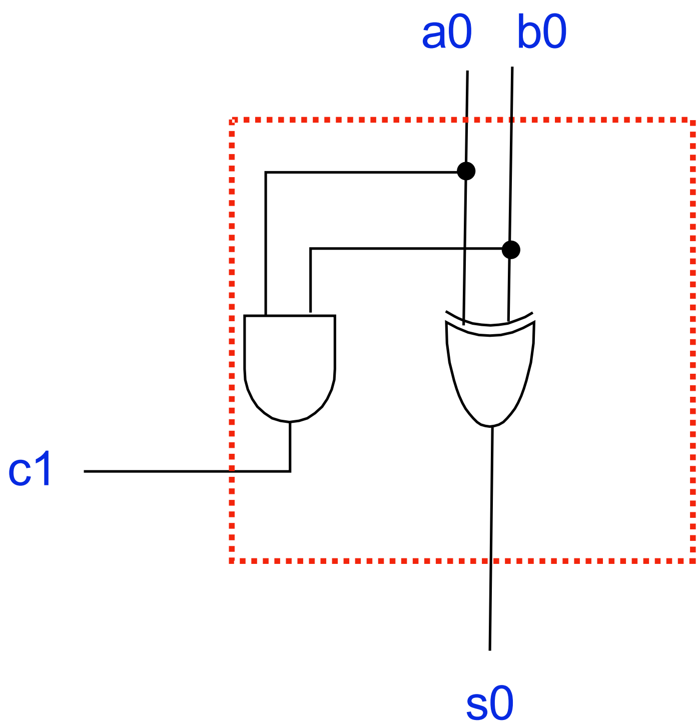
$\equiv$

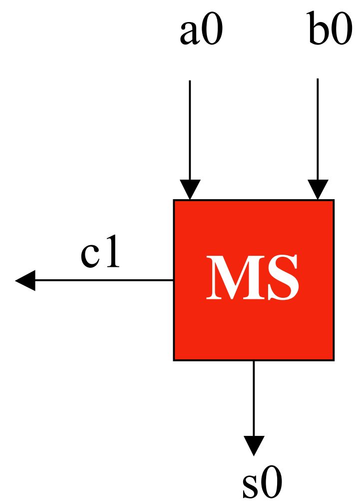


4. Circuitos Combinacionais

Voltando ao Meio Somador (*Half Adder*)

Redesenhando o meio somador, usando porta XOR





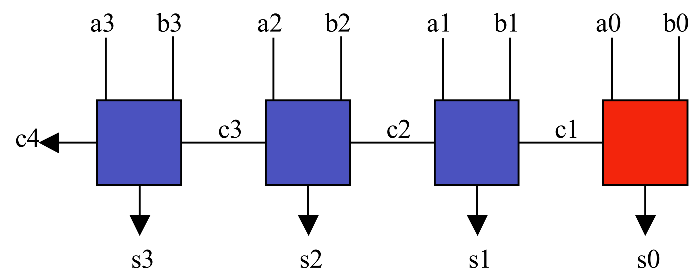
$s0 = \overline{a0} \cdot b0 + a0 \cdot \overline{b0}$

$c1 = a0 \cdot b0$

4. Circuitos Combinacionais

Projetando um Somador Paralelo

Projetando o circuito para as demais colunas




```
  0 1 1 0 1 1 0 0
    0 1 1 0 1 1 0 1
+   0 1 1 0 0 1 1 0
  -----------------
    1 1 0 1 0 0 1 1   (211)
```

c_i

a_i

$+$ b_i

c_{i+1} s_i

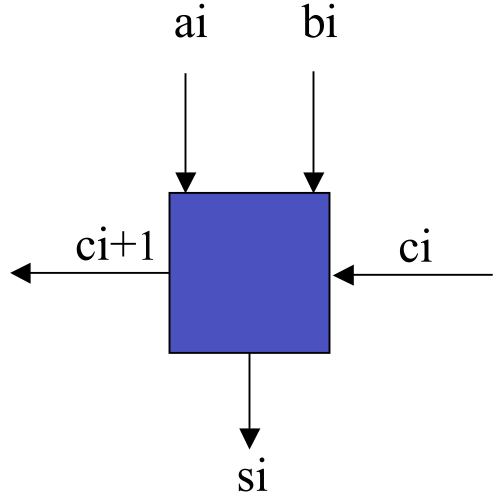
Quantas combinações de 3 bits existem?

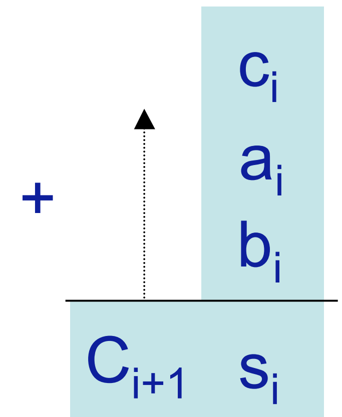
4. Circuitos Combinacionais

Projetando um Somador Paralelo

Projetando um circuito para as demais colunas

entradas			saídas	
ci	ai	bi	ci+1	si
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1





4. Circuitos Combinacionais

Projetando um Somador Paralelo

Projetando um circuito para as demais colunas

entradas			saídas	
ci	ai	bi	ci+1	si
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Mapa de Karnaugh para Ci+1

ci+1	$\overline{ai}\ \overline{bi}$	$\overline{ai}$ bi	ai bi	ai $\overline{bi}$
$\overline{ci}$	0	0	1	0
ci	0	1	1	1

ai·bi

ai·ci

bi·ci

ci+1 = ai·bi+ ai·ci+ bi·ci

4. Circuitos Combinacionais

Projetando um Somador Paralelo

Projetando um circuito para as demais colunas

entradas			saídas	
ci	ai	bi	ci+1	si
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Mapa de Karnaugh para si

si	$\overline{ai}\,\overline{bi}$	$\overline{ai}\,bi$	$ai\,bi$	$ai\,\overline{bi}$
$\overline{ci}$	0	1	0	1
ci	1	0	1	0

Não é possível simplificar, logo, usaremos todos os produtos do tipo mintermo!

$$si = \overline{ai}\cdot bi\cdot \overline{ci} + ai\cdot \overline{bi}\cdot \overline{ci} + \overline{ai}\cdot \overline{bi}\cdot ci + ai\cdot bi\cdot ci$$

4. Circuitos Combinacionais

Projetando um Somador Paralelo

Manipulando a expressão para si

$$si = \overline{ai} \cdot bi \cdot \overline{ci} + ai \cdot \overline{bi} \cdot \overline{ci} + \overline{ai} \cdot \overline{bi} \cdot ci + ai \cdot bi \cdot ci$$

$$= \overline{ci} \; (\underbrace{\overline{ai} \cdot bi + ai \cdot \overline{bi}}_{}) + ci \; (\underbrace{\overline{ai} \cdot \overline{bi} + ai \cdot bi}_{})$$

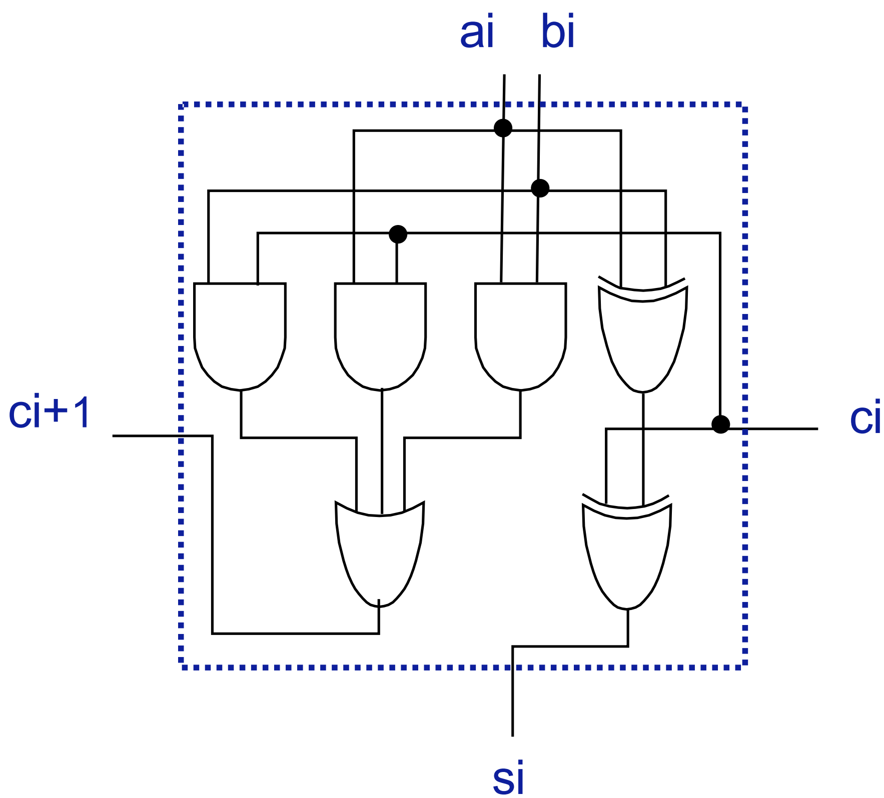
$$= \overline{ci} \; (ai \oplus bi) \quad + \quad ci \; (\overline{ai \oplus bi})$$

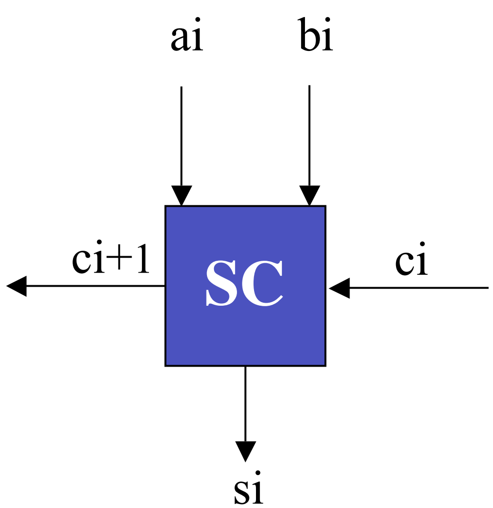
$$\boxed{= ci \oplus ai \oplus bi}$$

Normalmente, se assumem portas xor com duas entradas, o que aliás, corresponde à realidade da implementação em tecnologia CMOS.

4. Circuitos Combinacionais

O Somador Completo (*Full Adder*)





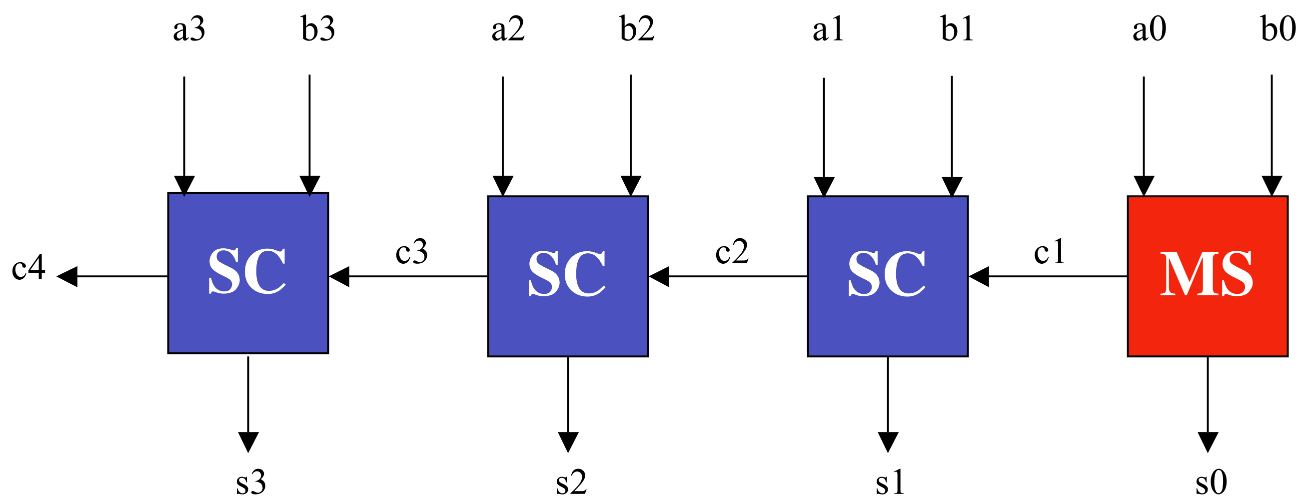
si = ci ⊕ ai ⊕ bi

ci+1 = ai·bi+ ai·ci+ bi·ci

4. Circuitos Combinacionais

Somador Binário Paralelo (de 4 bits)

Considerando dois números (A e B) com 4 bits cada

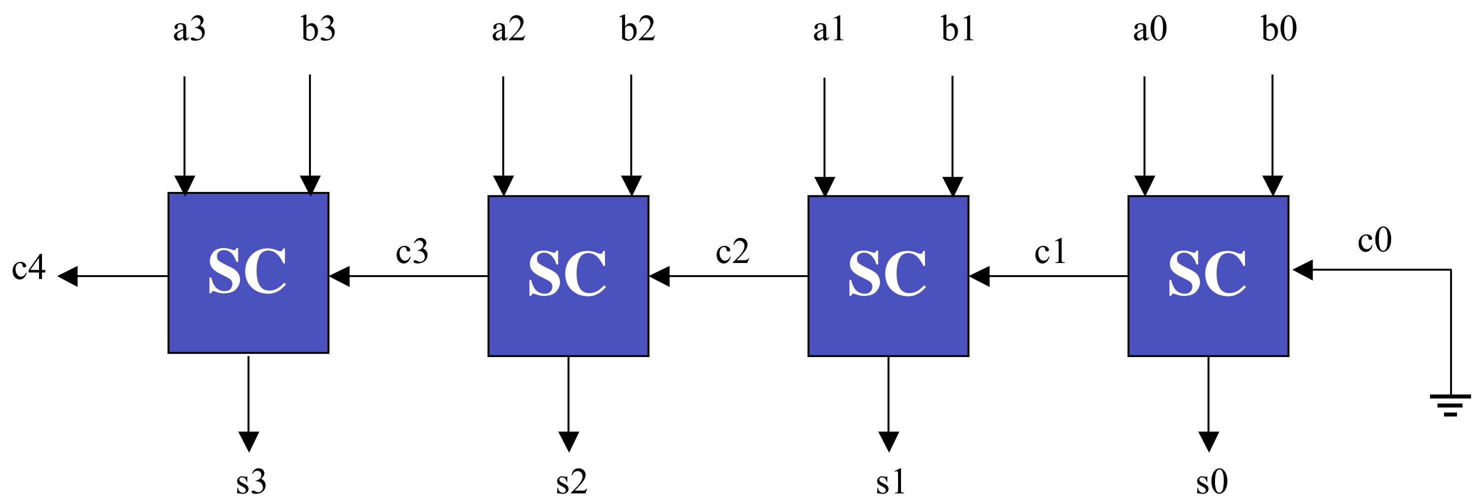


Note que o sinal c4 somente estabiliza depois que c1, c2 e c3 estabilizarem

4. Circuitos Combinacionais

Somador Binário Paralelo (de 4 bits)

Versão 2: somente com somadores completos



O Custo é ligeiramente maior, porém funciona!

4. Circuitos Combinacionais

E se os números que quisermos operar tiverem sinal?

- **Precisaremos considerar uma representação que sirva tanto para binários positivos quanto binários negativos**
- **A representação mais usada, neste caso, é complemento de 2**
- **Lembremos do porquê disto…**

4. Circuitos Combinacionais

Revisão da Adição Binária

Representação de Números Positivos e Negativos em Binário

Representação em sinal-magnitude

Exemplos: +9 e -9 representados com 8 bits

	sinal	magnitude
+9 =	0	0 0 0 1 0 0 1
-9 =	1	0 0 0 1 0 0 1

4. Circuitos Combinacionais

Revisão da Adição Binária

Representação de Números Positivos e Negativos em Binário

Representação em complemento de 2

Exemplos: +9 e -9 representados com 8 bits

sinal

+9	=	0	0	0	0	1	0	0	1
-9	=	1	1	1	1	0	1	1	1

4. Circuitos Combinacionais

Revisão da Adição Binária

Representação em complemento de 2

Sinal	Regra de formação	Exemplo
positivos	= sinal-magnitude	+9= 0 0 0 0 1 0 0 1
negativos	1. Toma-se a representação em sinal-magnitude	+9= 0 0 0 0 1 0 0 1
	2. Inverte-se o número, bit a bit	1 1 1 1 0 1 1 0
	3. Soma-se 1	1 1 1 1 0 1 1 1 = -9

4. Circuitos Combinacionais

Revisão da Adição Binária

Adição de números binários em complemento de 2

Para os próximos exemplos, considere números com 4 bits (ou seja, o intervalo de representação será **[-8,+7]**)

Exemplo 1: dois números positivos, cuja soma seja ≤ +7

	0 0 0 0		transporte ("carry")
	0 0 1 0	(+2)	
+	0 1 0 0	(+4)	
	0 1 1 0	(+6)	resultado correto

4. Circuitos Combinacionais

Revisão da Adição Binária

Adição de números binários em complemento de 2

Exemplo 2: dois números negativos, cuja soma seja ≥ -8

	1 1 0 0		transporte ("carry")
	1 1 1 0	(-2)	
+	1 1 0 0	(-4)	
	1 0 1 0	(-6)	resultado correto

Apesar deste último carry valer 1, não houve "overflow"

4. Circuitos Combinacionais

Revisão da Adição Binária

Adição de números binários em complemento de 2

Exemplo 3: um número positivo e um número negativo, tais que o resultado é positivo

	1 1 1 1		transporte ("carry")
	0 1 1 1	(+7)	
+	1 1 1 1	(-1)	
	0 1 1 0	(+6)	resultado correto

Novamente…

4. Circuitos Combinacionais

Revisão da Adição Binária

Adição de números binários em complemento de 2

Exemplo 4: um número positivo e um número negativo, tais que o resultado é negativo

	0 0 0 1		transporte (“carry”)
	1 0 0 1	(-7)	
+	0 0 0 1	(+1)	
	1 0 1 0	(-6)	resultado correto

4. Circuitos Combinacionais

Revisão da Adição Binária

Adição de números binários em complemento de 2

Exemplo 5: um positivo e um negativo, iguais em módulo

	1 1 1 1		transporte ("carry")
	0 1 0 1	(+5)	
+	1 0 1 1	(-5)	
	0 0 0 0	(0)	resultado correto

E novamente…

4. Circuitos Combinacionais

Revisão da Adição Binária

Adição de números binários em complemento de 2

Exemplo 6: 2 números positivos

	0 1 0 0	transporte ("carry")
	0 1 0 0	(+4)
+	0 1 0 1	(+5)
	1 0 0 1	(-7)

Resultado errado !

ocorre "overflow" quando esses 2 bits são diferentes

o resultado excede o intervalo de representação = overflow

4. Circuitos Combinacionais

Revisão da Adição Binária

Adição de números binários em complemento de 2

Exemplo 7: 2 números negativos

	1 0 0 0		transporte ("carry")
	1 1 0 0	(-4)	
+	1 0 1 1	(-5)	
	0 1 1 1	(+7)	**Resultado errado !**

ocorre "overflow" quando esses 2 bits são diferentes

o resultado excede o intervalo de representação = overflow

4. Circuitos Combinacionais

Revisão da Adição Binária

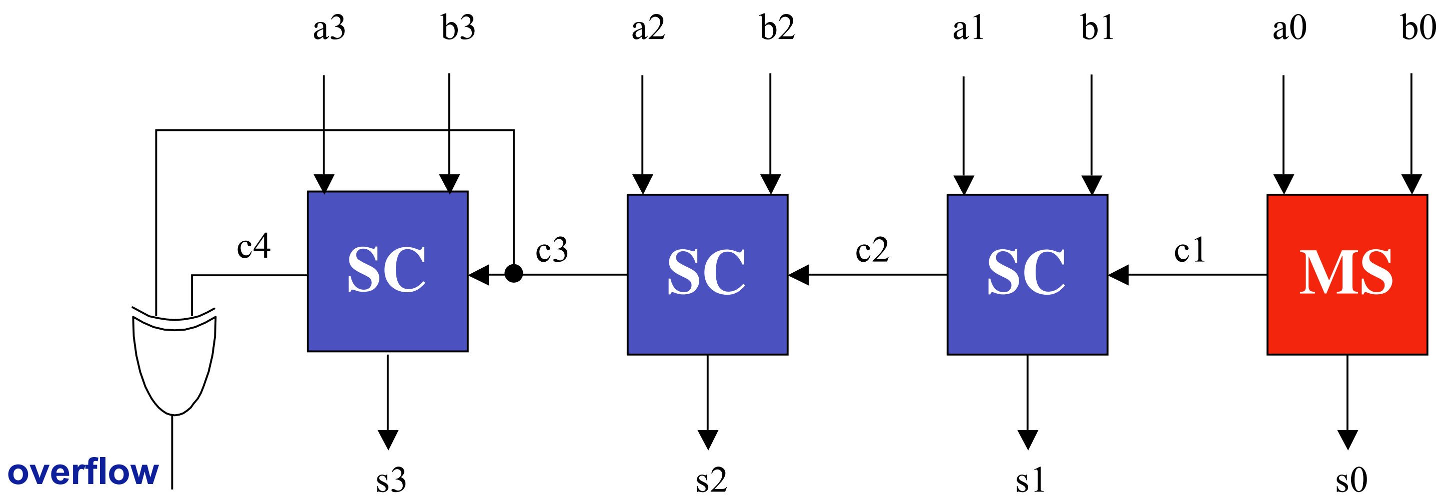
Adição de números binários em complemento de 2

Conclusões:

- **Números binários em complemento de 2 podem ser adicionados como se fossem número binários sem sinal**
- **Neste caso, a detecção de *overflow* se dá comparando-se os dois últimos sinais de *carry***

4. Circuitos Combinacionais

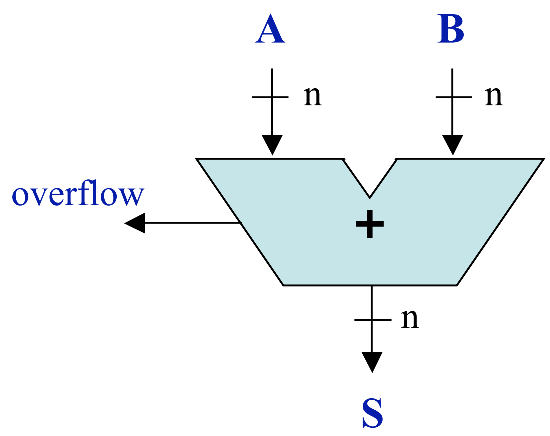
Somador Binário Paralelo para Números em Complemento de 2



esquemático de blocos

4. Circuitos Combinacionais

Somador Binário Paralelo (para Números em Complemento de 2)



símbolo
(no nível RT)